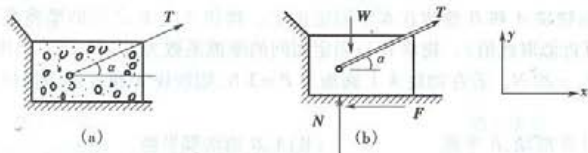


题 4-24 图

4-25 图示混凝土锚锭。设混凝土墩重为 1 000 kN, 它与土壤之间的静摩擦系数 $f=0.6$, 若铁索与水平线夹角 $\alpha=30^\circ$, 则不致使混凝土墩滑动的最大拉力为()。



题 4-25 图

- (A) 866 kN (B) 666 kN (C) 514 kN (D) 500 kN

4.2 运动学

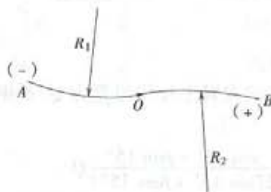
4-26 点 M 按 $s = t^3 - 12t + 2$ 的规律作直线运动 (t 以秒计, s 以米计), 则点 M 在最初 3 秒钟内所经过的路程为()。

注意: 路程与坐标 s 是不同的。

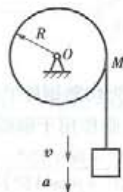
- (A) 7m (B) 9m (C) 23m (D) 26m

4-27 点 M 在曲线 AOB 上运动。曲线由 AO 、 OB 两段圆弧组成。 AO 段曲率半径 $R_1 = 18$ m, OB 段曲率半径 $R_2 = 24$ m, 取两圆弧交点 O 为原点, 并规定正负方向如图所示。已知点 M 的运动方程为 $s = 3 + 4t - t^2$ (t 以秒计, s 以米计), 则 $t = 5$ 秒时点 M 的加速度大小为()。

- (A) 1.5 m/s^2 (B) 2 m/s^2 (C) $2\sqrt{2} \text{ m/s}^2$ (D) 4 m/s^2



题 4-27 图



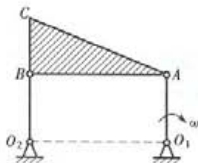
题 4-28 图

4-28 半径为 R 的滑轮上绕一绳子, 绳与轮间无相对滑动。绳子一端挂一物块, 在图示位置物块有速度 v 和加速度 a , M 点为滑轮上与铅垂绳段的相切点, 则在此瞬时 M 点加速度的大小为()。

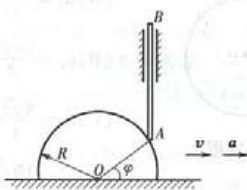
- (A) 0 (B) a (C) v^2/R (D) $\sqrt{\left(\frac{v^2}{R}\right)^2 + a^2}$

4-29 图示平面机构由 O_1A 、 O_2B 杆件与直角三角板 ABC 构成。图示位置 O_1A 、 O_2B 均垂直水平线 O_1O_2 ，且 $O_1A = O_2B = BC = R$ ， $AB = 2R$ ，此时杆 O_1A 以角速度 ω 转动，则三角板上 C 点的速度应为()。

- (A) $R\omega$ ，水平向右 (B) $2\sqrt{2}R\omega$ ，垂直 CO_1 向上
(C) $R\omega$ ，水平向左 (D) $2\sqrt{2}R\omega$ ，垂直 CO_2 向右



题 4-29 图



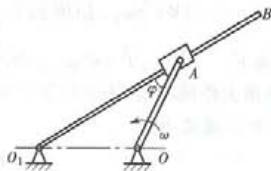
题 4-30 图

4-30 半圆形凸轮沿水平滑槽滑动并推动铅直杆 AB 沿铅直滑槽滑动。图示位置凸轮有速度为 v ，加速度为 a ， $\varphi = 30^\circ$ ，凸轮半径为 R ，则此瞬时杆 AB 的加速度 a_{AB} 为()。

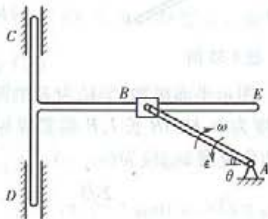
- (A) $\sqrt{3}a - \frac{8v^2}{R}$ ，向上 (B) $\sqrt{3}a - \frac{8v^2}{R}$ ，向下
(C) $\sqrt{3}a - \frac{2v^2}{R}$ ，向上 (D) $\sqrt{3}a - \frac{2v^2}{R}$ ，向下

4-31 图示平面机构，曲柄 OA 长 R ，以角速度 ω 绕 O 轴转动，并通过杆端滑块 A 带动摆杆 B ， B 绕 O_1 轴转动。已知 $OA = OO_1$ ，图示位置 $\varphi = 30^\circ$ ，则此时杆 O_1B 的角速度 ω_{O_1B} 为()。

- (A) $\frac{\omega}{4}$ ，逆时针向 (B) $\frac{\omega}{2}$ ，逆时针向 (C) ω ，逆时针向 (D) 2ω ，逆时针向



题 4-31 图



题 4-32 图

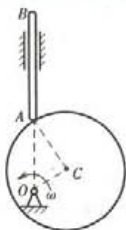
4-32 在图示平面机构中， AB 杆借助滑套 B 带动直角杆 CDE 运动，在图示位置， $\theta = 30^\circ$ ，角速度 $\omega = 2 \text{ rad/s}$ ，角加速度 $\epsilon = 1 \text{ rad/s}^2$ ，且知曲柄 AB 长 $L = 10 \text{ cm}$ ，则该瞬时 D 点的速度 v_D 和加速度 a_D 为()。

- (A) $10\sqrt{3} \text{ cm/s} \uparrow$ ， $20 + 5\sqrt{3} \text{ cm/s}^2 \uparrow$
(B) $10\sqrt{3} \text{ cm/s} \downarrow$ ， $20 + 5\sqrt{3} \text{ cm/s}^2 \uparrow$

(C) $10\sqrt{3} \text{ cm/s} \uparrow, 20 + 5\sqrt{3} \text{ cm/s}^2 \downarrow$

(D) $10\sqrt{3} \text{ cm/s} \downarrow, 20 + 5\sqrt{3} \text{ cm/s}^2 \downarrow$

4-33 偏心凸轮机构, 偏心距为 e , 轮半径 $R = \sqrt{3}e$, 轮以匀角速度 ω 绕 O 轴转动并推动杆 AB 沿铅直槽滑动。在图示位置, $OC \perp CA$, O, A, B 在一直线上。若以杆 AB 的 A 点为动点, 动系固结于轮上, 静系固结于地面, 则 A 点的科氏加速度 a_k 应为()。



题 4-33 图

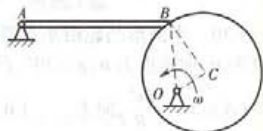
(A) $a_k = \frac{8\sqrt{3}}{3}e\omega^2$, 方向由 C 向 A

(B) $a_k = \frac{16\sqrt{3}}{3}e\omega^2$, 方向由 C 向 A

(C) $a_k = \frac{8\sqrt{3}}{3}e\omega^2$, 方向由 A 向 C

(D) $a_k = \frac{16\sqrt{3}}{3}e\omega^2$, 方向由 A 向 C

4-34 偏心凸轮机构, 偏心距为 e , 轮半径 $R = \sqrt{3}e$, 轮转动时将推动 AB 杆绕 A 轴转动。图示位置, $OC \perp CB$, OB 在铅直位置, 此时轮的角速度为 ω , 杆 AB 水平, B 端搁置在轮缘上, 杆长为 L , 则此瞬时杆 AB 的角速度 ω_{AB} 应为()。



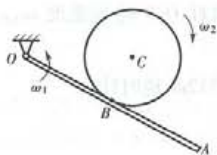
题 4-34 图

(A) $\left(\frac{\sqrt{3}R}{3L}\omega, \uparrow\right)$

(B) $\left(\frac{\sqrt{3}R}{3L}\omega, \downarrow\right)$

(C) $\left(\frac{2R}{3L}\omega, \uparrow\right)$

(D) $\left(\frac{2R}{3L}\omega, \downarrow\right)$



题 4-35 图

4-35 图示杆 OA 以角速度 ω_1 绕 O 轴旋转, 轮 C 相对杆以角速度 ω_2 在杆上滚动。轮半径为 R , 杆长为 $2l$, 此瞬时 $OB = BA$ 。若以轮心 C 为动点, 动系固结在 OA 杆上, 则 C 点的牵连速度 v_e 为()。

(A) $R\omega_2, \perp BC$ 向下

(B) $\frac{l}{2}\omega_1, \perp OB$ 向上

(C) $\sqrt{l^2 + R^2}\omega_2, \perp BC$ 向下

(D) $\sqrt{l^2 + R^2}\omega_1, \perp OC$ 向上

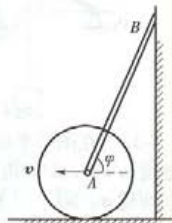
4-36 图示平面机构, 半径为 R 的圆轮在水平直线轨道上作纯滚动, 图示位置 $\varphi = 60^\circ$, 轮心 A 的速度为 v , 杆 AB 长 l , B 端紧靠铅直墙, 则此瞬时 B 点速度 v_B 和杆 AB 的角速度 ω_{AB} 应为()。

(A) $v_B = \sqrt{3}v, \downarrow; \omega_{AB} = \frac{2\sqrt{3}}{l}v, \downarrow$

(B) $v_B = \frac{v}{\sqrt{3}}, \downarrow; \omega_{AB} = \frac{2v}{\sqrt{3}l}, \downarrow$

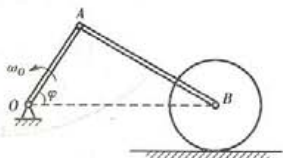
(C) $v_B = \sqrt{3}v, \downarrow; \omega_{AB} = \frac{2\sqrt{3}}{l}v, \uparrow$

(D) $v_B = \frac{v}{\sqrt{3}}, \downarrow; \omega_{AB} = \frac{2v}{\sqrt{3}l}, \uparrow$



题 4-36 图

4-37 图示平面机构。曲柄 OA 长为 r ，以匀角速度 ω_0 绕 O 轴转动，通过链杆 AB 带动轮 B 在水平直线轨道上作纯滚动。轮子半径为 R 。图示瞬时， $OA \perp AB$ ，且 $\varphi = 60^\circ$ ，则此瞬时轮 B 的角速度为()。



题 4-37 图

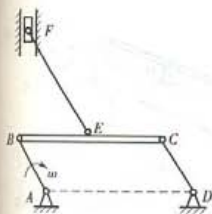
- (A) $\frac{\sqrt{3}r\omega_0}{3R}$, 顺时针向
 (B) $\frac{2\sqrt{3}r\omega_0}{3R}$, 逆时针向
 (C) $\frac{\sqrt{3}r\omega_0}{3R}$, 逆时针向
 (D) $\frac{2\sqrt{3}r\omega_0}{3R}$, 顺时针向

4-38 图示平面机构， $ABCD$ 为一平行四边形。 EF 杆的 E 端铰接 BC 杆， F 端铰接滑块可在铅直槽内滑动。已知 $AB = 10$ cm， $EF = 20$ cm。在图示位置 $\omega = 2$ rad/s，且 $EF \parallel AB$ ，则此瞬时杆 EF 的角速度 ω_{EF} 应为()。

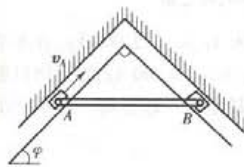
- (A) 2 rad/s, 顺时针向
 (B) 2 rad/s, 逆时针向
 (C) 1 rad/s, 顺时针向
 (D) 1 rad/s, 逆时针向

4-39 图示平面机构，杆 AB 连接两滑块置于直角槽内。 A 以匀速率 $v_A = 1$ m/s 沿槽运动。 $\varphi = 45^\circ$ ， $AB = 2$ m，图示位置 AB 杆处于水平，则该瞬时 B 点的加速度为()。

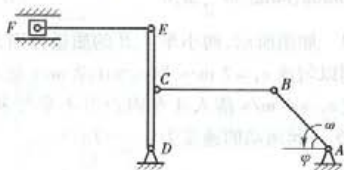
- (A) $\sqrt{2}$ m/s², 向下
 (B) $\sqrt{2}$ m/s², 向上
 (C) 1 m/s², 向下
 (D) 1 m/s², 向上



题 4-38 图



题 4-39 图



题 4-40 图

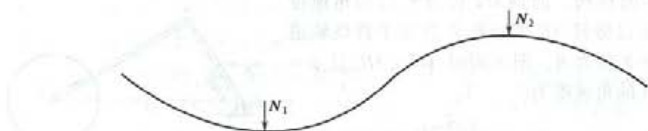
4-40 图示平面机构，各杆长度为 $AB = 20$ cm， $BC = ED = EF = 30$ cm， $CE = CD$ ，杆 AB 以匀角速度 $\omega = 4\pi$ rad/s 绕 A 轴转动。图示位置 $\varphi = 45^\circ$ ， BC 和 EF 水平， ED 竖直。此瞬时杆 ED 的角加速度为()。

- (A) $\frac{64 + 96\sqrt{2}}{9}\pi^2$ rad/s², 顺时针向
 (B) $\frac{64 + 96\sqrt{2}}{9}\pi^2$ rad/s², 逆时针向
 (C) $\frac{-64 + 96\sqrt{2}}{9}\pi^2$ rad/s², 顺时针向
 (D) $\frac{-64 + 96\sqrt{2}}{9}\pi^2$ rad/s², 逆时针向

4.3 动力学

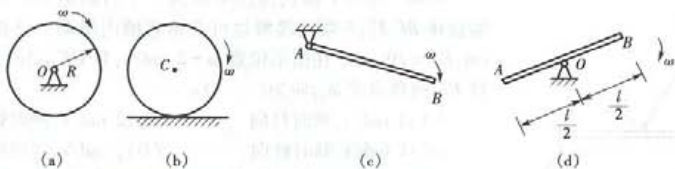
4-41 重为 G 的汽车在图示的凹凸路面上以匀速率 v 行驶，若凹下路面的最低处与凸起路面的最高处的曲率半径均为 ρ ，则汽车在最低处时对路面的铅直压力 N_1 和在最高处时对路面的铅直压力 N_2 的大小就分别为()。

- (A) $N_1 = G, N_2 = G$
 (B) $N_1 = G\left(1 + \frac{v^2}{\rho g}\right), N_2 = G\left(1 + \frac{v^2}{\rho g}\right)$
 (C) $N_1 = G\left(1 - \frac{v^2}{\rho g}\right), N_2 = G\left(1 + \frac{v^2}{\rho g}\right)$
 (D) $N_1 = G\left(1 + \frac{v^2}{\rho g}\right), N_2 = G\left(1 - \frac{v^2}{\rho g}\right)$



题 4-41 图

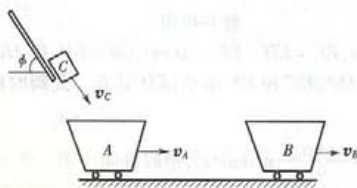
4-42 图示均质轮和均质杆,质量均为 m ;轮子半径均为 R ,杆长均为 l ;轮和杆均以角速度 ω 转动,其中图(b)中,轮在直线轨道上作纯滚动,则它们的动量大小按图次序为()。



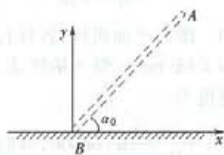
题 4-42 图

- (A) $mR\omega, mR\omega, ml\omega, m\frac{l}{2}\omega$ (B) $0, mR\omega, m\frac{l}{2}\omega, 0$
 (C) $mR\omega, mR\omega, m\frac{l}{2}\omega, 0$ (D) $0, mR\omega, ml\omega, m\frac{l}{2}\omega$

4-43 如图所示,两小车 A 、 B 的质量分别为 $m_A = 1\ 000\ \text{kg}$, $m_B = 2\ 000\ \text{kg}$,在水平直线轨道上分别以匀速 $v_A = 2\ \text{m/s}$ 和 $v_B = 1.2\ \text{m/s}$ 运动。一质量为 $m_C = 200\ \text{kg}$ 的重物以俯角 $\phi = 60^\circ$,速度 $v_C = 4\ \text{m/s}$ 落入 A 车内。当 A 车与 B 车相碰后紧接在一起运动。若不计水平向摩擦,则两车一起运动的速度为()。



题 4-43 图



题 4-44 图

- (A) $1.5\ \text{m/s}$ (B) $2\ \text{m/s}$ (C) $2.5\ \text{m/s}$ (D) $3\ \text{m/s}$

4-44 如图所示,均质杆 AB ,长为 $2l$, B 端搁置在光滑水平面上,并与水平成 α_0 角,当杆倒下时, A 点的运动轨迹方程为()。

- (A) $\left(\frac{x_A - l\cos\alpha_0}{l}\right)^2 + \left(\frac{y_A}{2l}\right)^2 = 1$ (B) $\left(\frac{x_A}{2l}\right)^2 + \left(\frac{y_A - l\cos\alpha_0}{l}\right)^2 = 1$
 (C) $\left(\frac{x_A}{2l}\right)^2 + \left(\frac{y_A}{2l}\right)^2 = 1$ (D) $\left(\frac{x_A - l\cos\alpha_0}{l}\right)^2 + \left(\frac{y_A - l\sin\alpha_0}{l}\right)^2 = 1$

4-45 如图所示,均质杆 OA ,重为 P ,长为 $2l$,绕过 O 端的水平轴在铅直面内转动,转到 φ

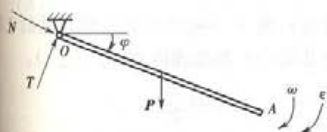
角时,有角速度 ω 和角加速度 ε ,则此时铰链 O 处的约束力 T 和 N 为()。

$$(A) \begin{cases} T = P \left(\cos \varphi - \frac{l}{g} \varepsilon \right) \\ N = P \left(\sin \varphi + \frac{l}{g} \omega^2 \right) \end{cases}$$

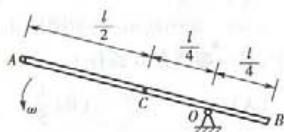
$$(B) \begin{cases} T = -P \left(\cos \varphi - \frac{l}{g} \varepsilon \right) \\ N = -P \left(\sin \varphi + \frac{l}{g} \omega^2 \right) \end{cases}$$

$$(C) \begin{cases} T = P \left(\cos \varphi - \frac{l}{g} \varepsilon \right) \\ N = -P \left(\sin \varphi + \frac{l}{g} \omega^2 \right) \end{cases}$$

$$(D) \begin{cases} T = -P \left(\cos \varphi - \frac{l}{g} \varepsilon \right) \\ N = P \left(\cos \varphi + \frac{l}{g} \omega^2 \right) \end{cases}$$



题 4-45 图



题 4-46 图

4-46 如图所示,均质杆 AB ,质量为 M ,长为 l , A 端连接一质量为 m 的小球,并一起以角速度 ω 绕 O 轴转动,则此系统对 O 轴的动量矩 H_o 和动能 T 为()。

$$(A) \begin{cases} H_o = \frac{M+9m}{16} \omega l^2 \\ T = \frac{7M+27m}{96} \omega^2 l^2 \end{cases}$$

$$(B) \begin{cases} H_o = \frac{M+9m}{16} \omega l^2 \\ T = \frac{M+9m}{32} \omega^2 l^2 \end{cases}$$

$$(C) \begin{cases} H_o = \frac{7M+27m}{48} \omega l^2 \\ T = \frac{7M+27m}{96} \omega^2 l^2 \end{cases}$$

$$(D) \begin{cases} H_o = \frac{7M+27m}{48} \omega l^2 \\ T = \frac{M+9m}{32} \omega^2 l^2 \end{cases}$$

4-47 如图所示,均质圆盘重为 W ,半径为 R ,绳子绕过圆盘,两端各挂重为 Q 和 P 的物块,绳与盘之间无相对滑动,且不计绳重,则圆盘的角加速度为()。

$$(A) \varepsilon = \frac{2g(Q-P)}{RW}$$

$$(B) \varepsilon = \frac{2g(Q+P)}{RW}$$

$$(C) \varepsilon = \frac{2g(Q+P)}{R(W+2Q+2P)}$$

$$(D) \varepsilon = \frac{2g(Q-P)}{R(W+2Q+2P)}$$

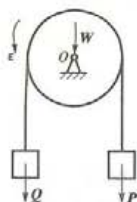
4-48 绳子跨过滑轮 O , A 端挂重为 P 的人, B 端挂着重为 P 的物块。轮重不计。系统开始静止。当此人相对绳子以速度 u 向上爬绳时,物块 B 和人 A 相对地面的速度应为()。

$$(A) (v_A = u, v_B = 0)$$

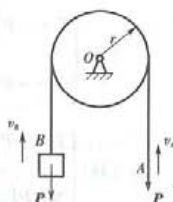
$$(B) \left(v_A = u, v_B = \frac{u}{2} \right)$$

$$(C) \left(v_A = \frac{u}{2}, v_B = \frac{u}{2} \right)$$

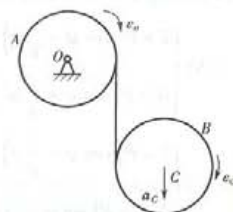
$$(D) \left(v_A = \frac{u}{2}, v_B = 0 \right)$$



题 4-47 图



题 4-48 图



题 4-49 图

4-49 如图所示,均质圆柱 A 、 B 重均为 P , 半径均为 r , 绳子一端绕在绕 O 轴转动的 A 圆柱上, 另一端绕在 B 圆柱上。若不计摩擦, 则 B 落下时其质心 C 的加速度 a_c 为()。

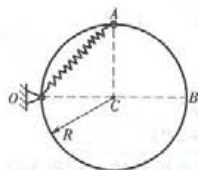
- (A) g (B) $\frac{4}{5}g$ (C) $\frac{3}{4}g$ (D) $\frac{1}{2}g$

4-50 如图所示, 一弹簧的刚性系数为 k , 一端固定于 O 点, 另一端连接一重为 P 的小环 A , 使其能沿半径为 R 的铅直大圆环上滑动。弹簧原长为 R , 则小环从 A 到 B , 弹性力和重力做功总和为()。

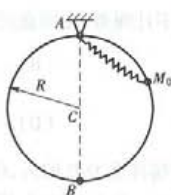
- (A) $kR^2(1 - \sqrt{2}) + PR$ (B) $kR^2(\sqrt{2} - 1) + PR$
 (C) $-kR^2(\sqrt{2} + 1) + PR$ (D) $kR^2(\sqrt{2} + 1) + PR$

4-51 如图所示, 弹簧一端固定于 A 点, A 是半径为 R 的铅直大圆环的最高点, 弹簧另一端连接一质量为 m 的小圆环 M , M 可沿固定大圆环滑动。 M 初位置在 M_0 点, 而 $AM_0 = R =$ 弹簧原长。当 M 从 M_0 不受摩擦、无初速度地滑至大环最低点 B , 此时欲使 M 对大环的压力等于零, 则该弹簧的弹簧常数 K 应为()。

- (A) $\frac{mg}{R}$ (B) $\frac{2mg}{R}$ (C) $\frac{3mg}{R}$ (D) $\frac{4mg}{R}$



题 4-50 图



题 4-51 图



题 4-52 图

4-52 如图所示, 均质杆 OA , 重为 P , 长为 l , 可在铅直平面内绕水平固定轴 O 转动。杆在图示铅直位置时静止, 欲使杆转到水平位置, 则至少要给杆以角速度 ω 为()。

- (A) $\sqrt{\frac{2g}{l}}$ (B) $\sqrt{\frac{3g}{l}}$ (C) $\sqrt{\frac{4g}{l}}$ (D) $\sqrt{\frac{6g}{l}}$

4-53 如图所示, 升降机皮带轮 C 上作用一常力矩 M , 被提升重物 A 的重量为 P_1 , 平衡锤 B 的重量为 P_2 , 皮带轮 C 、 D 的半径均为 R , 重量均为 Q , 均为均质圆柱体。不计皮带质量, 则

重物 A 的加速度为()。

$$(A) a = \frac{(P_1 - P_2)R + M}{(Q + P_1 + P_2)R^2} g$$

$$(B) a = \frac{(P_1 - P_2)R + M}{(2Q + P_1 + P_2)R^2} g$$

$$(C) a = \frac{(P_2 - P_1)R + M}{(Q + P_1 + P_2)R^2} g$$

$$(D) a = \frac{(P_2 - P_1)R + M}{(2Q + P_1 + P_2)R^2} g$$

4-54 如图所示,均质圆轮质量为 m , 轮上绕以细绳, 绳的一端固定不动。轮心从初始位置 A_0 无初速度下落, 则当轮心降落高度为 h 时绳子一端的拉力 T 为()。

$$(A) T = \frac{1}{4} mg$$

$$(B) T = \frac{1}{3} mg$$

$$(C) T = \frac{1}{2} mg$$

$$(D) T = \frac{3}{5} mg$$

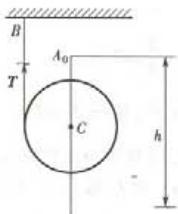


图 4-54

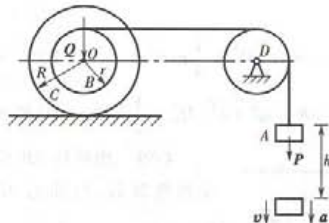


图 4-55

4-55 如图所示,物块 A 重为 P , 连在不计重量、不伸长的绳子上。绳子绕过定滑轮 D 并绕在鼓轮 B 上。当 A 下落时带动轮 C 沿水平直线轨道作纯滚动。鼓轮 B 的半径为 r , C 的半径为 R , 两轮固连, 总重为 Q , 其对水平中心轴 O 的回转半径为 ρ , 轮 D 半径 r , 重不计, 则物块 A 的加速度 a 为()。

$$(A) \frac{2P(r+R)^2 g}{2P(r+R)^2 + Q(\rho^2 + 2R^2)}$$

$$(B) \frac{2P(r+R)^2 g}{P(r+R)^2 + Q(\rho^2 + R^2)}$$

$$(C) \frac{P(r+R)^2 g}{2P(r+R)^2 + Q(\rho^2 + R^2)}$$

$$(D) \frac{P(r+R)^2 g}{P(r+R)^2 + Q(\rho^2 + R^2)}$$

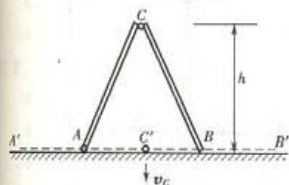


图 4-56

4-56 如图所示,两均质杆 AC 和 BC 各重 P , 长均为 l , 在 C 处以铰链连接, 并置于光滑水平面上。 C 点的初始高度为 h , 两杆从静止开始在铅直面内落下, 则铰链 C 到达地面 C' 时的速度 v_c 为()。

$$(A) v_c = \sqrt{12 hg} \quad (B) v_c = \sqrt{4 hg}$$

$$(C) v_c = \sqrt{3 hg} \quad (D) v_c = \sqrt{\frac{2}{3} hg}$$

4-57 图示机构 $O_1 A B O_2$ 为一平行四边形, $O_1 A = O_2 B = R$, $O_1 O_2 = AB = l$, 在该瞬时杆 $O_1 A$ 绕 O_1 轴的角速度为 ω , 角加速度为 ε , 则质量为 m 的均质杆 AB 的惯性力系向其质心 C 简化的主矢量 R' 和主矩 M'_c 的大小分别为()。

$$(A) R' = mR \sqrt{\omega^4 + \varepsilon^2}, M'_c = \frac{1}{12} ml^2 \varepsilon \quad (B) R' = mR \sqrt{\omega^4 + \varepsilon^2}, M'_c = 0$$

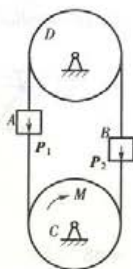
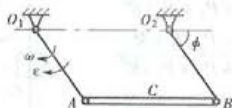


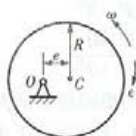
图 4-53

$$(C) R' = mR\omega^2, M'_c = 0$$

$$(D) R' = mR\varepsilon, M'_c = \frac{1}{3}ml^2\varepsilon$$



题 4-57 图

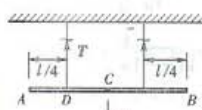


题 4-58 图

4-58 半径为 R 、质量为 m 的均质圆盘绕偏心轴 O 转动, 偏心距 $e = R/2$, 图示瞬时转动角速度为 ω , 角加速度为 ε , 则该圆盘的惯性力系向 O 点简化的主矢量 R' 和主矩 M'_o 的大小为 ()。

$$(A) R' = \frac{1}{2}mR\omega^2, M'_o = \frac{1}{4}mR^2\varepsilon \quad (B) R' = \frac{1}{2}mR\varepsilon, M'_o = \frac{5}{4}mR^2\varepsilon$$

$$(C) R' = \frac{1}{2}mR\sqrt{\omega^4 + \varepsilon^2}, M'_o = \frac{1}{2}mR^2\varepsilon \quad (D) R' = \frac{1}{2}mR\sqrt{\omega^4 + \varepsilon^2}, M'_o = \frac{3}{4}mR^2\varepsilon$$



题 4-59 图

4-59 均质杆 AB 长为 l , 重为 P , 用两绳悬挂如图所示。当右绳突然断裂时, 杆质心 C 的加速度 a_c 和左绳拉力 T 的大小为 ()。

$$(A) a_c = \frac{1}{4}g, T = \frac{3}{4}P \quad (B) a_c = \frac{3}{5}g, T = \frac{2}{5}P$$

$$(C) a_c = \frac{3}{7}g, T = \frac{4}{7}P \quad (D) a_c = \frac{3}{10}g, T = \frac{7}{10}P$$

4-60 如图所示, 在倾角为 α 的光滑斜面上置一刚性系数为 k 的弹簧, 一质量为 m 的物体沿斜面下滑 s 距离与弹簧相碰, 碰后弹簧与物块不分离并发生振动, 则自由振动的固有圆频率为 ()。

$$(A) \sqrt{\frac{k}{m}}$$

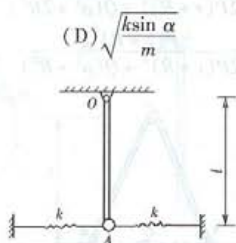
$$(B) \sqrt{\frac{k}{ms}}$$

$$(C) \sqrt{\frac{k}{m \sin \alpha}}$$

$$(D) \sqrt{\frac{k \sin \alpha}{m}}$$



题 4-60



题 4-61

4-61 如图所示, 单摆由无重刚杆 OA 和质量为 m 的小球 A 构成。小球上连有两个刚性系数为 k 的水平弹簧, 则摆微振动的固有圆频率为 ()。

$$(A) \sqrt{\frac{k}{m}}$$

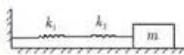
$$(B) \sqrt{\frac{2k}{m}}$$

$$(C) \sqrt{\frac{g}{l} + \frac{2k}{m}}$$

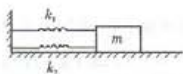
$$(D) \sqrt{\frac{g}{l} + \frac{k}{m}}$$

4-62 如图所示, (a)(b)(c) 三个质量弹簧系统的固有圆频率分别为 p_1, p_2, p_3 , 则它们之间的关系是 ()。

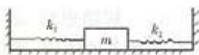
- (A) $p_1 < p_2 = p_3$ (B) $p_2 < p_3 = p_1$ (C) $p_3 < p_1 = p_2$ (D) $p_1 = p_2 = p_3$



(a)



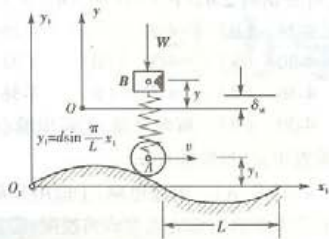
(b)



(c)

题 4-62

4-63 如图所示,某轮 A 上装置一重为 W 的物块 B,于某瞬时 ($t=0$) 由水平路面进入一曲线路面并继续以匀速 v 行驶。该曲线路面按 $y_1 = d \sin \frac{\pi}{L} x_1$ 的规律起伏 (设坐标原点 O_1 及坐标轴 y_1 如图所示)。轮 A 进入曲线路面时,物块 B 在铅垂方向无速度。已知弹簧的刚性系数为 k 。试求物 B 的强迫振动振幅和轮 A 的临界速度 v_k 为 ()。



题 4-63

(A) $B = \frac{kgd}{W}, v_k = \frac{kgL}{\pi W}$

(B) $B = \frac{kgdL^2}{kgL^2 - \pi^2 v^2 W}, v_k = \frac{L}{\pi} \sqrt{\frac{kg}{W}}$

(C) $B = kd, v_k = \frac{kL}{\pi}$

(D) $B = \frac{kgdL^2}{kgL^2 - \pi^2 v^2 W}, v_k \gg \frac{L}{\pi} \sqrt{\frac{kg}{W}}$

4-64 振幅频率特性曲线表明,欲减少强迫振动的振幅,可采取的措施有 ()。

(A) 增加阻尼

(C) 增加阻尼,或使 $z = \frac{\omega}{p} \gg 1$, 或使 $z = \frac{\omega}{p} \ll 1$

(B) 避开共振区

(D) $z = \frac{\omega}{p} = 0$, 或增加阻尼

习题答案

4-1 (B) 4-2 (D) 4-3 (C) 4-4 (A) 4-5 (D) 4-6 (B)

4-7 (A)。解题思路:应用力的平移定理,将力 F 平移到轮心再计算,较为方便。

4-8 (B)

4-9 (C)。解题思路:取整体为对象,由受力图可知 $x_C = x_D$,再取 AD 为对象,由受力图可知 F_y 与 P 必组成力偶,则由 $\sum M_A(F_i)$ 或由 $\sum m = 0$ 即可得 x_D 。

4-10 (D)

4-11 (D)。解题思路:先取整体 $\rightarrow y_B, (x_A + x_B)$;再取 $ABDE \rightarrow y_K$;最后取 $BC \rightarrow x_H$ 。

4-12 (C)

4-13 (A)。解题思路:将 T 在 A 点分解成 T_x, T_y, T_z , 计算 $M_x(T)$ 和 $M_y(T)$, 对 $M_N(T)$, 需运用关系式 $M_N(T) = M_N(T_y) = [M_O(T_y)]$ 。

4-14 (C) 4-15 (B)

4-16 (D)。解题思路:分别选 CC' 和 BC 为矩轴。

4-17 (B) 4-18 (A)

4-19 (B)。解题思路:用截面法求 1 杆和 2 杆的内力,最后取节点 A 求 S_3 。

4-20 (C)。解题思路:先[整]→ N_B ;再[EBD]→ S_{DC} ,最后由节点D→ S_1 。

4-21 (D)

4-22 (A)。解题思路:必须分别考察[A]或[B]是否平衡,因为[A]或[B]若滑动,则 F_A 或 F_B 不是由平衡条件决定,而应为 $F_A = f_1 N_A$ 或 $F_B = f_2 N_B$ 。

4-23 (C)。解题思路:因点A有向上或向下滑动可能,故平衡时答案必在 S_{\max} 和 S_{\min} 之间,可分别列 $\Sigma M_B(F_i) = 0$ 及 $\Sigma M_C(F_i) = 0$ (C点为 N_A 与 N_B 的交点)即可求解。

4-24 (B) 4-25 (C) 4-26 (C) 4-27 (C) 4-28 (D) 4-29 (A)

4-30 (A) 4-31 (B) 4-32 (C) 4-33 (A) 4-34 (C) 4-35 (D)

4-36 (B) 4-37 (B) 4-38 (D)

4-39 (B)。解题思路:①运用瞬心法求 ω_{AB} ;②根据 $a_B = a_A + a_{BA}^n + a_{BA}^t$ 图示各加速度;③选垂直于 a_{BA}^n 投影轴求 a_B 。

4-40 (A)。解题思路:①运用关系式 $a_C^t + a_C^n = a_B^n + a_B^t + a_{CB}^t + a_{CB}^n$ 在C点图示各量;②根据上式需要求出相应速度或角速度;③选择适当投影轴即可解。

4-41 (D) 4-42 (B)

4-43 (A)。解题思路:①以[A+C]运用动量守恒定理理解出C落入A中后(A+C)的共同速度;②再以[A+C与B]为对象与上同法求解。

4-44 (A)。解题思路:因 $\Sigma F_x = 0$,质心 $v_{C_0} = 0$,故 $x_C = \text{常数}$;然后画出任一瞬时AB位置,根据几何关系就可求解;注意杆与轴x夹角 α 为变量,但 $\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1$ 总是成立的。

4-45 (C)

4-46 (C)。解题思路:运用转动惯量平行移轴定理求解杆AB对O轴的转动惯量。

4-47 (D)。解题思路:运用 $dT = \Sigma d'W$ (或 $\frac{dH_O}{dt} = M_O^*$)求解。

4-48 (C)。解题思路:因 $\Sigma M_O^* = 0$,又 $t = 0$ 时系统静止,故可应用 $H_O = 0$ 求解。

4-49 (B)。解题思路:运用达朗伯原理求解较便,对整体建立 $\Sigma M_O(F) = 0$,并运用 $a_C = r(\varepsilon_O + \varepsilon_C)$ 即可解。

4-50 (A) 4-51 (B) 4-52 (B) 4-53 (C) 4-54 (B)

4-55 (D)。解题思路:本题取整体,选用 $dT = \Sigma d'W^i$ 较便,注意对理想约束系统,只要计算主动力作的元功。

4-56 (C)。解题思路:对系统选用 $T_2 - T_1 = W$ 。

4-57 (B) 4-58 (D)

4-59 (C)。解题思路:可选用平面运动微分方程解,但要运用 $a_C = a_D + a_{CD} = a_D^t + a_{CD}^t$ (因 $t = 0, v_D = v_C = \omega_{AB} = 0$)。

4-60 (A) 4-61 (C) 4-62 (A)

4-63 (B)。解题思路:①取物B的静平衡位置O为y轴原点,设任一瞬时弹簧的变形 $\delta = y - \delta_0 - y_1$;②物B受重力W和弹性力F作用,注意,已设弹簧被拉长,故力F向下;③列出物B的运动微分方程,并整理成标准形式;④运用 $B = \frac{h}{p^2 - \omega^2}$ 及其共振概念即可解。

4-64 (C)

5

材料力学

考试大纲

1. 材料在拉伸、压缩时的力学性能

低碳钢、铸铁拉伸, 压缩实验的应力—应变曲线; 力学性能指标。

2. 拉伸和压缩

轴力和轴力图; 杆件横截面和斜截面上的应力; 强度条件; 胡克定律; 变形计算。

3. 剪切和挤压

剪切和挤压的实用计算; 剪切面; 挤压面; 剪切强度; 挤压强度。

4. 扭转

扭矩和扭矩图; 圆轴扭转切应力; 切应力互等定理; 剪切胡克定律; 圆轴扭转的强度条件; 扭转角计算及刚度条件。

5. 截面几何性质

静矩和形心; 惯性矩和惯性积; 平行轴公式; 形心主轴及形心主惯性矩概念。

6. 弯曲

梁的内力方程; 剪力图和弯矩图; 分布载荷、剪力、弯矩之间的微分关系; 正应力强度条件; 切应力强度条件; 梁的合理截面; 弯曲中心概念; 求梁变形的积分法、叠加法。

7. 应力状态

平面应力状态分析的解析法和应力圆法; 主应力和最大切应力; 广义胡克定律; 四个常用的强度理论。

8. 组合变形

拉/压—弯组合、弯—扭组合情况下杆件的强度校核; 斜弯曲。

9. 压杆稳定

压杆的临界载荷; 欧拉公式; 柔度; 临界应力总图; 压杆的稳定校核。

复习指导

材料力学是一门与工程实际紧密联系的技术基础课程,在初学材料力学的过程中往往感到:一是材料力学的公式多,难以记忆;二是材料力学的计算方法多,难以融会贯通与掌握。这是正常的感觉。而对于参加全国勘察设计注册工程师执业资格考试公共基础考试的人员而言,如何消除初学者的不适心理状态是取得考试成功的必要条件。因此应通过对复习教程的全面学习,既要搞清基本概念,又要掌握基本理论、基本技能,而且还要经过演算一部分习题,掌握材料力学解题的基本方法,以提高分析问题和解决问题的能力。

①复习重点在基本变形部分(即轴向拉伸与压缩、剪切、扭转、弯曲各节),应着重明确基本概念,理解与熟练掌握基本理论,了解分析材料力学问题的基本方法,如求内力的截面法。内力图的作法一定要正确掌握并会熟练运用。明确产生各基本变形的条件,对各基本变形下的应力计算式、变形计算式中各种量的意义、量纲及适用条件,都应正确认识与理解,达到会熟练应用的程度。

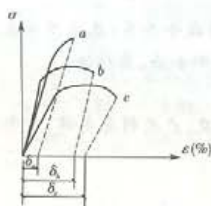
②了解截面几何性质中的有关概念,掌握有一对称轴的组截面的形心主惯性矩计算。对惯矩的平行移轴公式要会熟练应用。了解并掌握组合变形问题的分析方法。了解压杆稳定的概念,掌握压杆柔度的计算及细长压杆的欧拉临界力公式及其适用范围。

③应力状态与强度理论是本课程中的难点和重点之一。应该着重明确有关概念,掌握分析平面应力状态的解析法和应力圆法,会从受力构件中一点取出应力单元体,用应力圆或解析法求该点的主应力大小、方向,并画出主单元体。了解一点的最大正应力和最大剪应力的计算。掌握四个常用强度理论的相当应力表达式,会校核复杂应力状态下一点的强度。

④至于考试题目,因受到考试章程所设定题量及时间的限制(平均每题为2分钟时间),重点在基本概念、基本理论与基本技能上的单一性或综合性、应用性的考核,不会涉及复杂的计算。

解题时应通过运用基本概念、基本理论去分析、判断,再经过必要的基本计算,或辅以对比、排除等方法寻找答案范围,即可选出正确答案。

下面主要针对一些概念性强或具有代表意义的仿真考试题目作一些说明。



例 5-1 图

【例 5-1】 a 、 b 、 c 三种材料如图所示,强度极限 σ_b 、弹性模量 E 、延伸率 δ 的正确排序是()。

(A) $\sigma_b: a > b > c, E: a > b > c, \delta: b > c > a$

(B) $\sigma_b: a > b > c, E: b > a > c, \delta: c > b > a$

(C) $\sigma_b: a > b > c, E: c > b > a, \delta: c > b > a$

(D) $\sigma_b: a > b > c, E: b > a > c, \delta: b > c > a$

解:本题是关于材料力学性能的概念题,关键是要对材料的强度极限 σ_b 、弹性模量 E 和延伸率 δ 能正确地理解, σ_b 是应力—应变曲线最高点的纵坐标, E 是应力—应变曲线中直线段的斜率,因此 σ_b 、 E 的大小很容易判断,而延伸率 δ 是拉断后材料的残留的塑性应变,要判断不同材料延伸率的大小应在 σ — ε 曲线上各材料拉断点作直线段的平行线,该平行线在 ε 轴上所截取的线段即为延伸率。所以正确答案应选(B)。

【例 5-2】 等截面直杆受拉力 P 作用,若选用三种不同的截面形状:圆形、正方形、空心

圆,比较材料的用量,则是()。

- (A) 正方形截面最费料 (B) 圆形截面最省料
(C) 空心圆截面最省料 (D) 三者用料相同

解:本题主要考核拉压杆横截面上的正应力分布规律及强度条件。

因轴向拉压杆横截面上正应力均匀分布,故强度条件 $N/A \leq [\sigma]$ 中仅与横截面面积有关,而与截面形状无关。所以选择不同截面形状时,需要的截面面积相同,即三者用料相同。

故应选答案(D)。

【例 5-3】 图示结构, AB 杆为钢杆,横截面面积 $A_1 = 500 \text{ mm}^2$,许用应力 $[\sigma]_1 = 160 \text{ MPa}$; BC 杆为铜杆,横截面面积 $A_2 = 700 \text{ mm}^2$,许用应力 $[\sigma]_2 = 100 \text{ MPa}$,则该结构的许可荷载 $[P]$ 为()。

- (A) 92.4 kN (B) 140 kN
(C) 104.3 kN (D) 150 kN

解:①计算各杆轴力。

截取 B 节点部分为脱离体,如图示,

$$\sum X = 0, \quad N_2 \sin 60^\circ - N_1 \sin 30^\circ = 0$$

$$\sum Y = 0, \quad N_1 \cos 30^\circ + N_2 \cos 60^\circ - P = 0.$$

解得 $N_1 = \frac{\sqrt{3}}{2}P, N_2 = \frac{1}{2}P$

②计算各杆所能承受的许可轴力。

依据强度条件 $\frac{N}{A} \leq [\sigma]$, 得各杆所能承受的最大轴力为

$$N_{1\max} = [\sigma]_1 A_1 = 160 \times 10^6 \times 500 \times 10^{-6} = 80 \text{ kN}$$

$$N_{2\max} = [\sigma]_2 A_2 = 100 \times 10^6 \times 700 \times 10^{-6} = 70 \text{ kN}$$

③计算两杆分别达到最大轴力时所对应的荷载。

由 $N_1 = \frac{\sqrt{3}}{2}P$ 及 $N_{1\max} = 80 \text{ kN}$, 得 $P_1 = \frac{2}{\sqrt{3}}N_1 = \frac{2}{\sqrt{3}}80 = 92.4 \text{ kN}$

由 $N_2 = \frac{1}{2}P$ 及 $N_{2\max} = 70 \text{ kN}$, 得 $P_2 = 2N_2 = 2 \times 70 = 140 \text{ kN}$

④确定结构的许可荷载。

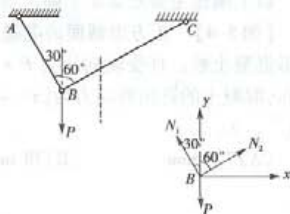
比较 P_1 和 P_2 , 取其中的最小值作为结构的许可荷载, 于是 $[P] = 92.4 \text{ kN}$, 所以应选答案(A)。

⑤杆件的许可轴力 $[N]$ 和结构的许可荷载是两个不同的概念, 因为结构中各杆件并不是同时达到危险状态, 所以其许可荷载是由最先达到许可轴力的那根杆的强度条件决定的。若根据两杆所能承受的最大轴力, 由 $\sum Y = 0$, 即

$$N_1 \cos 36^\circ + N_2 \cos 60^\circ - P = 0$$

来求许可荷载 $[P]$, 由

$$N_{1\max} = 80 \text{ kN} \text{ 及 } N_{2\max} = 70 \text{ kN} \text{ 得}$$



例 5-3 图

$$[P] = N_{1\max} \cos 30^\circ + N_{2\max} \cos 60^\circ = 80 \frac{\sqrt{3}}{2} + 70 \times \frac{1}{2} = 104.3 \text{ kN}$$

这一解法的错误:其一只考虑了平衡条件 $\Sigma Y = 0$, 而没有考虑 $\Sigma X = 0$, 若将 $N_{1\max}$ 、 $N_{2\max}$ 代入 $\Sigma X = 0$ 方程中, 可发现

$$\Sigma X = -N_{1\max} \sin 30^\circ + N_{2\max} \sin 60^\circ \neq 0$$

表明上述结果不能满足全部平衡条件, 因而是错误的; 其二, 是因为各杆不一定会同时达到危险状态。

以上阐述主要是显示了确定结构许可荷载的步骤及常见错误。实际考题不会这样繁复。

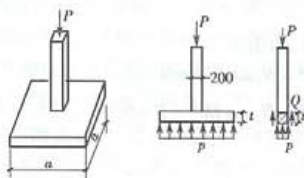
【例 5-4】 正方形截面的混凝土柱, 其横截面边长为 200 mm, 基底边长为 $a = 0.8 \text{ m}$ 的正方形混凝土板。柱受轴向压力 $P = 100 \text{ kN}$, 如图所示。假设地基对混凝土板的支反力为均匀分布, 混凝土的许用剪应力为 $[\tau] = 1.5 \text{ MPa}$, 试问混凝土板满足剪切强度所需的最小厚度 t 应为()。

(A) 7.8 mm

(B) 78 mm

(C) 16.7 mm

(D) 83 mm



例 5-4 图

解: 本题关键是正确判断剪切面及相应剪力 Q 的计算。

混凝土板如果剪切强度不够, 则混凝土柱会截穿混凝土板, 其剪力面是截穿的孔的四个侧面, 其剪切面的面积为

$$A_Q = 4 \times 0.2t = 0.8t \text{ m}^2$$

地基的支承反力均匀分布, 其值为 p , 即

$$p = \frac{P}{a^2} = \frac{100 \times 10^3}{0.8^2} = 0.156 \text{ MPa}$$

剪切面上的剪力为 $Q = P - p \times (0.2)^2$

由混凝土板的剪切强度条件, 得

$$\tau = \frac{Q}{A_Q} = \frac{P - p \times (0.2)^2}{0.8t} \leq [\tau]$$

$$t \geq \frac{P - p(0.2)^2}{0.8[\tau]} = \frac{100 \times 10^3 - 0.156 \times 10^6 \times (0.2)^2}{0.8 \times 1.5 \times 10^6} = 78 \times 10^{-3} \text{ m} = 78 \text{ mm}$$

取 $t_{\min} = 78 \text{ mm}$, 故应选答案(B)。

下面分析答案错误的原由:

若计算剪力时不扣除地基反力 $(0.2)^2 P$, 则 $Q = P$, 于是

$$t \geq \frac{100 \times 10^3}{0.8[\tau]} = \frac{100 \times 10^3}{0.8 \times 1.5 \times 10^6} = 83 \text{ mm}$$

得错误答案(D); 若剪切面面积错记为 $A_Q = 4at$, 得 $t = 16.7 \text{ mm}$, 即得(C)的错误答案; (A)的

错误是计算错误。

【例 5-5】 已知圆截面杆扭转时,横截面上的最大剪应力为 τ_{\max} , 两端面间的相对扭转角为 ϕ 。若圆杆的直径增大一倍(即为原直径的两倍), 则此时的最大剪应力 τ'_{\max} 和相对扭转角 ϕ' 与原来的 τ_{\max} 和 ϕ 的比值为()。

(A) $\tau'_{\max}/\tau_{\max} = \frac{1}{2}, \phi'/\phi = \frac{1}{4}$

(B) $\tau'_{\max}/\tau_{\max} = \frac{1}{4}, \phi'/\phi = \frac{1}{8}$

(C) $\tau'_{\max}/\tau_{\max} = \frac{1}{8}, \phi'/\phi = \frac{1}{8}$

(D) $\tau'_{\max}/\tau_{\max} = \frac{1}{8}, \phi'/\phi = \frac{1}{16}$

解: 本题主要考核圆杆扭转时的剪应力和扭角计算公式, 应该熟记。

由最大剪应力计算公式 $\tau_{\max} = \frac{M_T}{W_T}$

当扭矩不变时剪应力仅与抗扭截面系数 W_T 成反比, 可得

$$\tau'_{\max}/\tau_{\max} = \frac{W_T}{W'_T} = \frac{\frac{\pi d^3}{16}}{\frac{\pi (2d)^3}{16}} = \frac{1}{8}$$

同理 $\phi = \frac{M_T l}{GI_p}$

可得 $\frac{\phi'}{\phi} = \frac{I_p}{I'_p} = \frac{\frac{\pi d^4}{32}}{\frac{\pi (2d)^4}{32}} = \frac{1}{16}$

故应选答案(D)。

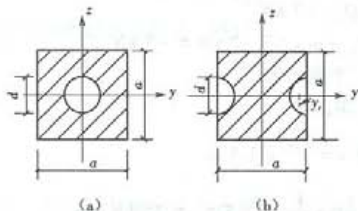
【例 5-6】 两图形分别如图所示, 图中尺寸 a 和 d 分别相等, 则两图形对各自形心轴 y, z 的轴惯性矩之间的关系为()。

(A) $(I_y)_a = (I_y)_b, (I_z)_a < (I_z)_b$

(B) $(I_y)_a = (I_y)_b, (I_z)_a > (I_z)_b$

(C) $(I_y)_a > (I_y)_b, (I_z)_a = (I_z)_b$

(D) $(I_y)_a < (I_y)_b, (I_z)_a = (I_z)_b$



例 5-6 图

解: 本题主要考核惯性矩概念及平行移轴公式的掌握。

两个图形均可看成是一个正方形挖去一个圆形的组合截面。

对 y 轴 $(I_y)_a = \frac{a^4}{12} - \frac{\pi d^4}{64} = (I_y)_b$

$$\text{对 } z \text{ 轴 } (I_z)_a = \frac{a^4}{12} - \frac{\pi d^4}{64}$$

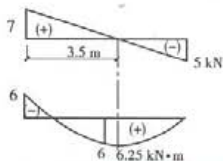
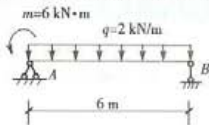
$$(I_z)_b = \frac{a^4}{12} - \left\{ \frac{\pi d^4}{64} + \frac{\pi d^2}{4} \left[\left(\frac{a}{2} \right)^2 - ay_c \right] \right\}$$

注意到, $y_c = \frac{2d}{3\pi} \cdot \frac{a}{2} > 2y_c$

上式中半圆对 z 轴的惯矩计算要用二次平行移轴公式, 第一次移到半圆形心轴, 第二次再从形心轴移到 z 轴。

所以 $(I_z)_a > (I_z)_b$, 应选答案(B)。

其实分析两图形对 z 轴的惯矩时, 从两图形分布离 z 轴的距离远近即可知惯矩的大小, 图形离 z 轴分布越远者惯矩越大, 故 $(I_z)_a > (I_z)_b$ 。



例 5-7 图

【例 5-7】 图示简支梁受均布荷载 q 及集中力偶 m 作用, 则梁内的最大弯矩为()。

- (A) 6 kN·m (B) 6.25 kN·m
(C) 9 kN·m (D) 12 kN·m

解: 本题若正确熟练地作出剪力图、弯矩图, 则正确答案很容易选定。

作 Q 、 M 图的方法可采用列 Q 、 M 方程, 然后作图, 或采用 q 、 Q 、 M 间的微分关系、积分关系的简易作图法。无论采用哪种方法, 前提是应正确无误求出支座反力。

下面对简易作图法作一些阐述:

①用平衡条件 $\sum M_A = 0, \sum M_B = 0$, 求得 $R_B = 5 \text{ kN} (\uparrow), R_A = 7 \text{ kN} (\uparrow)$, 用 $\sum Y = 7 + 5 - 2 \times 6 = 0$ 校核。

②定形。 AB 段为均布荷载 $q (\downarrow)$, 则 $\frac{dQ}{dx} = q$ 知剪力图为斜直线 (\backslash), 由 $\frac{d^2M}{dx^2} = q$ 知弯矩图为一向下凸的二次抛物线 (\sim)。

③定控制截面 Q 、 M 值。 Q 图为直线定二个截面值

$$x = \xi (\text{无穷小量}), Q_{A+\xi} = 7 \text{ kN}$$

$$x = L - \xi, Q_{B-\xi} = Q_{A+\xi} + \omega_{AB} = 7 - 2 \times 6 = -5 \text{ kN}$$

M 图为二次抛物线定三个截面值

$$M_{A+\xi} = -6 \text{ kN} \cdot \text{m}, M_B = 0$$

$$Q = 0 \text{ 截面 } D, \text{ 距 } A \text{ 支座 } x = \frac{Q_{A+\xi}}{q} = 3.5 \text{ m}$$

$$M_0 = M_{A+\xi} + \Omega_{AD} = -6 + \frac{1}{2} \times 7 \times 3.5 = 6.25 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

作出 Q 、 M 图如图所示。 显然 $M_{\max} = 6.25 \text{ kN} \cdot \text{m}$, 故应选答案(B)。

本题亦可用截面法 $M = \sum_{\xi \in (L)}$ 在最大弯矩可能发生截面 ($Q = 0$ 截面或集中外力偶所在一侧截面) 进行试算, 然后找出其中最大者, 但不能误定为跨中截面弯矩为最大。

【例 5-8】 图示梁中横截面上的最大正应力为()。

- (A) 9.38 MPa (B) 5.63 MPa (C) 3.75 MPa (D) 11.26 MPa

解:本题主要考核作 M 图的熟练及正应力计算公式的运用。

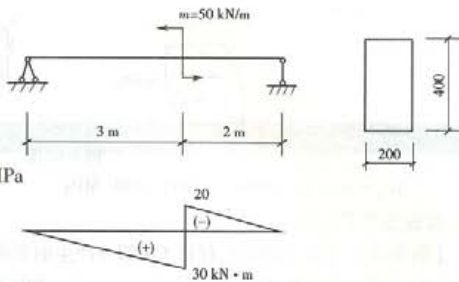
由 M 图可见 $M_{\max} = 30 \text{ kN} \cdot \text{m}$

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W_z}$$

$$\sigma_{\max} = \frac{30 \times 10^3}{\frac{20 \times 40^2}{6} \times 10^{-6}} = 5.63 \text{ MPa}$$

故应选答案(B)。

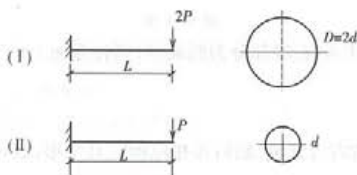
其他错误结果(A)、(C)为最大弯矩用错所致,(D)为抗弯截面系数错误所致。



例 5-8 图

【例 5-9】材料相同的悬臂梁 I 及 II, 所受荷载及截面尺寸如图所示, 关于它们的最大挠度, 结论正确者为()。

- (A) I 梁最大挠度是 II 梁的 1/8 倍 (B) I 梁最大挠度是 II 梁的 1/4 倍
(C) I 梁最大挠度是 II 梁的 4 倍 (D) I、II 梁最大挠度相等



例 5-9 图

解:本题主要考核悬臂梁最大挠度与荷载、跨度、 EI 的关系式。

由悬臂梁自由端处作用集中荷载的挠度公式 $f = \frac{PL^3}{3EI_z}$ 知, 当梁的材料、跨度相同时, 最大挠度仅与所受荷载成正比, 与梁的惯性矩 I_z 成反比。所以

$$\frac{f_1}{f_2} = \frac{2P / \frac{\pi(2d)^4}{64}}{P / \frac{\pi d^4}{64}} = \frac{1}{8}$$

故应选答案(A)。

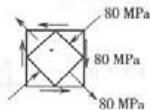
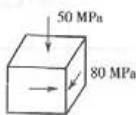
【例 5-10】受力构件内一点的应力单元体如图所示, 则其第三强度理论的相当应力为()。

- (A) 130 MPa (B) 160 MPa (C) 30 MPa (D) 80 MPa

解:本题重点考核应力状态分析中主应力的确定及第三强度理论的表情式记忆。

该点为三向应力状态, 已知一个主应力为 -50 MPa , 为此取垂直于该主平面的投影, 得图所示纯剪应力状态, 其主应力单元体如图示。按代数值排列主应力:

$$\sigma_1 = 80 \text{ MPa}, \sigma_2 = -50 \text{ MPa}, \sigma_3 = -80 \text{ MPa}$$



例 5-10 图

$$\sigma_3 = \sigma_1 - \sigma_3 = 80 - (-80) = 160 \text{ MPa}$$

故应选答案(B)。

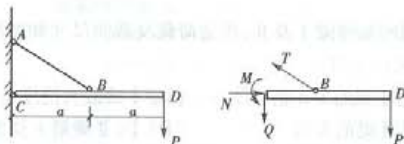
【例 5-11】 图示结构中, 杆件 CB 部分产生的变形为()。

(A) 拉伸与弯曲组合

(B) 弯曲变形

(C) 压缩与弯曲组合

(D) 斜弯曲

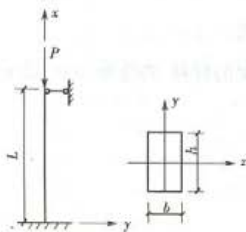


例 5-11 图

解: 在 CB 段用截面截开, 取右段部分为脱离体, 则杆截面上内力如图所示。故 CB 段为轴向压缩及弯曲变形组合。

故应选答案(C)。

用截面法确定杆产生的内力分量, 然后再相应确定其变形, 这也是分析组合变形杆的方法之一。



例 5-12 图

【例 5-12】 如图, 细长压杆, 一端球铰支承, 另一端为固定支承, 截面为矩形, 杆长为 L , 材料弹性模量为 E , 则该压杆的临界力为()。

(A) $\frac{\pi^2 E}{(0.7L)^2} \frac{bh^3}{12}$

(B) $\frac{\pi^2 E}{L^2} \frac{bh^3}{12}$

(C) $\frac{\pi^2 E}{L^2} \frac{hb^3}{12}$

(D) $\frac{\pi^2 E}{(0.7L)^2} \frac{hb^3}{12}$

解: 细长压杆临界力由欧拉公式 $P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{(\mu L)^2}$ 确定。压杆

失稳时, 将发生弯曲变形, 由于杆端约束在各个方向相同, 因此, 压杆将在抗弯刚度最小的平面 (xz 平面) 内失稳, 即杆件横截面将绕其惯性矩最小的形心主惯性轴转动。

所以惯性矩 I 应取 $\frac{hb^3}{12}$ 。则

$$F_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{(\mu L)^2} = \frac{\pi^2 E}{12} \frac{hb^3}{(0.7L)^2}$$

故应选答案(D)。

复习内容

5.1 轴向拉伸与压缩

要求:

- ①了解轴向拉(压)杆的受力特征与变形特征;
- ②了解内力、应力、位移、变形和应变的概念;
- ③掌握截面法求轴力的步骤和轴力图的作法;
- ④掌握横截面上的应力计算,了解斜截面上的应力计算;
- ⑤熟悉胡克定律及其应用、拉(压)杆变形计算;
- ⑥了解常用工程材料(低碳钢、铸铁)拉(压)时的力学性能,掌握强度条件的应用。

5.1.1 引言

1. 材料力学的任务

材料力学是研究构件强度、刚度和稳定性计算的学科。这些计算是工程师选定既安全又经济的构件材料和尺寸的必要基础。

强度是指构件在荷载作用下抵抗破坏的能力。

刚度是指构件在荷载作用下抵抗变形的能力。

稳定性是指构件保持其原有平衡形式的能。

2. 变形固体的基本假设

各种构件均由固体材料制成。固体在外力作用下将发生变形,故称为变形固体。材料力学中对变形固体所作的基本假设如下。

- ①连续性假设:组成固体的物质毫无空隙地充满了固体的几何空间。
- ②均匀性假设:在固体的体积内,各处的力学性能完全相同。
- ③各向同性假设:在固体的各个方向上有相同的力学性能。
- ④小变形的概念:构件由荷载引起的变形远小于构件的原始尺寸。

3. 杆件的主要几何特征

杆件是指长度 L 远大于横向尺寸(高度和宽度)的构件。这是材料力学研究的主要对象。杆件的两个主要的几何特征是横截面和轴线。

- ①横截面:垂直于杆件长度方向的截面。
- ②轴线:各横截面形心的连线。

若杆的轴线为直线,称为直杆。若杆的轴线为曲线,称为曲杆。

5.1.2 轴向拉伸与压缩

- ①力学模型:轴向拉压杆的力学模型,如图 5.1-1 所示。



图 5.1-1

②受力特征:作用于杆两端的外力的合力,大小相等、指向相反、沿杆件轴线作用。

③变形特征:杆件主要产生轴线方向的均匀伸长(缩短)。

5.1.3 轴向拉伸(压缩)杆横截面上的内力

1. 内力

内力是由外力作用而引起的构件内部各部分之间的相互作用力。

2. 截面法

截面法是求内力的一般方法。用截面法求内力的步骤如下。

①截开:在需求内力的截面处,假想地沿该截面将构件截分为二。

②代替:任取一部分为研究对象,称为脱离体。用内力代替弃去部分对脱离体的作用。

③平衡:对脱离体列写平衡条件,求解未知内力。

截面法的图示如图 5.1-2。

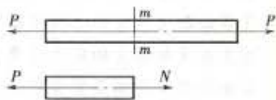


图 5.1-2

3. 轴力

轴向拉压杆横截面上的内力,其作用线必定与杆轴线相重合,称为轴力,以 N 表示。轴力 N 规定以拉力为正,压力为负。

4. 轴力图

轴力图是表示沿杆件轴线各横截面上轴力变化规律的图线。

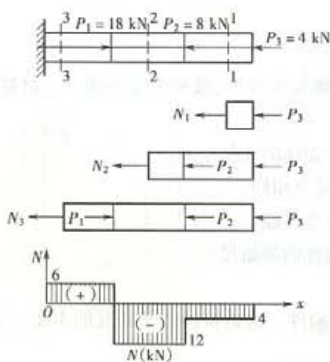


图 5.1-3

【例 5.1-1】画出图 5.1-3 中直杆的轴力图。

解:用截面 1-1、2-2、3-3 将杆截开,取脱离体如图所示。各截面的轴力 N_1 、 N_2 、 N_3 均假定为拉力。由静力平衡方程 $\sum X=0$, 分别求得

$$N_1 = -P_3 = -4 \text{ kN (压力)}$$

$$N_2 = -P_2 - P_3 = -12 \text{ kN (压力)}$$

$$N_3 = P_1 - P_2 - P_3 = 6 \text{ kN (拉力)}$$

其中负号表示轴力为压力。

取坐标系 Nox , x 轴平行杆轴线, 根据各段轴力的大小和正负可绘出轴力图如图所示。

分析与讨论如下。

①本例中若取截面左部分为脱离体时, 则应先计算杆件的未知外力(包括支座反力)。

②用截面法求轴力时, 总是假设截面上的内力为正, 这样由平衡条件解得的内力的正负号, 就是该截面上内力的实际正负号。

③作多个集中外力作用杆的轴力图可采用简易法, 其原则是: 在集中外力作用的截面上轴

力固有突变,突变大小等于集中力的大小,突变方向看集中力对后段杆的作用是拉或压,拉者向上突变,压者向下突变。

5.1.4 轴向拉压杆横截面上的应力

轴向拉压杆横截面上的应力垂直于截面,为正应力。正应力在整个横截面上均匀分布,如图 5.1-4 所示,其表示为

$$\sigma = \frac{N}{A} \quad (5.1-1)$$

式中: σ 为横截面上的正应力, N/m^2 或 Pa ; N 为轴力, N ; A 为横截面积, m^2 。

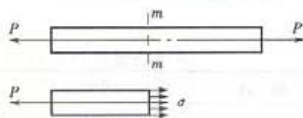


图 5.1-4

5.1.5 轴向拉压杆斜截面上的应力

斜截面上的应力均匀分布,如图 5.1-5,其总应力及应力分量为

$$\text{总应力 } p_{\alpha} = \frac{N}{A_{\alpha}} = \sigma_0 \cos \alpha \quad (5.1-2)$$

$$\text{正应力 } \sigma_{\alpha} = p_{\alpha} \cos \alpha = \sigma_0 \cos^2 \alpha \quad (5.1-3)$$

$$\text{剪应力 } \tau_{\alpha} = p_{\alpha} \sin \alpha = \frac{\sigma_0}{2} \sin 2\alpha \quad (5.1-4)$$

式中: α 为由横截面外法线转至斜截面外法线的夹角,以逆时针转动为正; A_{α} 为斜截面 $m-m$ 的截面积; σ_0 为横截面上的正应力。

σ_{α} 以拉应力为正,压应力为负。 τ_{α} 以其对脱离体内一点产生顺时针力矩时为正,反之则为负。

轴向拉压杆中最大正应力发生在 $\alpha=0^{\circ}$ 的横截面上,最小正应力发生在 $\alpha=90^{\circ}$ 的纵截面上,其值分别为

$$\sigma_{\alpha \max} = \sigma_0$$

$$\sigma_{\alpha \min} = 0$$

最大剪应力发生在 $\alpha = \pm 45^{\circ}$ 的斜截面上,最小剪应力发生在 $\alpha=0^{\circ}$ 的横截面和 $\alpha=90^{\circ}$ 的纵截面上,其值分别为

$$|\tau_{\alpha}|_{\max} = \frac{\sigma_0}{2}$$

$$|\tau_{\alpha}|_{\min} = 0$$

5.1.6 材料的力学性能

1. 低碳钢在拉伸时的力学性能

低碳钢拉伸时的应力—应变曲线如图 5.1-6 所示。这一曲线分四个阶段,有四个特征点,见表 5.1-1。应力—应变曲线上还有如下规律。

①卸载定律:在卸载过程中,应力和应变按直线规律变化,如图 5.1-6 中直线 dd' 。

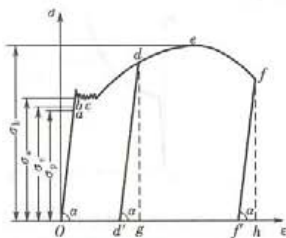


图 5.1-6

②冷作硬化:材料拉伸到强化阶段后,卸除荷载,再次加载时,材料的比例极限提高而塑性降低的现象,称为冷作硬化,如图 5.1-6 中曲线 $d'def$,在图 5.1-6 中, OJ' 段表示未经冷作硬化,拉伸至断裂后的塑性应变; $d'f$ 段表示经冷作硬化,再拉伸至断裂后的塑性应变。

主要性能指标见表 5.1-2。

表 5.1-1

阶段	图 5.1-6 中线段	特征点	说明
弹性阶段	Oab	比例极限 σ_p 弹性极限 σ_e	σ_p 为应力与应变成正比的最高应力 σ_e 为不产生残余变形的最高应力
屈服阶段	bc	屈服极限 σ_s	σ_s 为应力变化不大而变形显著增加时的最低应力
强化阶段	ce	抗拉强度 σ_b	σ_b 为材料在断裂前所能承受的最大名义应力
局部变形阶段	ef		产生颈缩现象到试件断裂

表 5.1-2

性能	性能指标	说明
弹性性能	弹性模量 E	当 $\sigma \leq \sigma_p$ 时, $E = \frac{\sigma}{\epsilon}$
强度性能	屈服极限 σ_s	材料出现显著的塑性变形
	抗拉强度 σ_b	材料的最大承载能力
塑性性能	延伸率 $\delta = \frac{L_1 - L}{L} \times 100\%$	材料拉伸时的塑性变形程度
	截面收缩率 $\psi = \frac{A - A_1}{A} \times 100\%$	材料的塑性变形程度

2. 低碳钢在压缩时的力学性能

低碳钢在压缩时的应力—应变曲线如图 5.1-7 中实线所示。

低碳钢压缩时的比例极限 σ_p 、屈服极限 σ_s 、弹性模量 E 与拉伸时基本相同,但测不出抗压强度 σ_b 。

3. 铸铁拉伸时的力学性能

铸铁拉伸时的应力—应变曲线如图 5.1-8 所示。

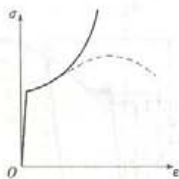


图 5.1-7

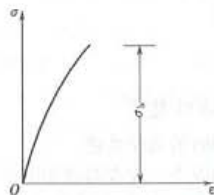


图 5.1-8

应力与应变无明显的线性关系,拉断前的应变很小,试验时只能测得抗拉强度 σ_b 。弹性模量 E 以总应变为 0.1% 时的割线斜率来度量。

4. 铸铁压缩时的力学性能

铸铁压缩时的应力—应变曲线如图 5.1-9 所示。

铸铁压缩时的抗压强度比拉伸时大 4~5 倍,破坏时破裂面与轴线成 $35^\circ \sim 45^\circ$ 。宜于作抗压构件。

5. 塑性材料和脆性材料

延伸率 $\delta > 5\%$ 的材料称为塑性材料。延伸率 $\delta < 5\%$ 的材料称为脆性材料。

6. 屈服强度 $\sigma_{0.2}$

对于没有明显屈服阶段的塑性材料,通常用材料产生 0.2% 的残余应变时所对应的应力作为屈服强度,并以 $\sigma_{0.2}$ 表示,如图 5.1-10 所示。

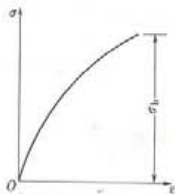


图 5.1-9

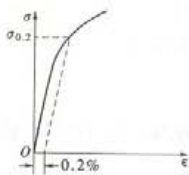


图 5.1-10

5.1.7 强度条件

1. 许用应力

材料正常工作容许采用的最高应力,由极限应力除以安全系数求得。

$$\text{塑性材料 } [\sigma] = \frac{\sigma_s}{n_s} \quad (5.1-5)$$

$$\text{脆性材料 } [\sigma] = \frac{\sigma_b}{n_b} \quad (5.1-6)$$

式中: σ_s 为屈服极限; σ_b 为抗拉强度; n_s 、 n_b 为安全系数。

2. 强度条件

构件的最大工作应力不得超过材料的许用应力。轴向拉杆的强度条件为

$$\sigma_{\max} = \frac{N_{\max}}{A} \leq [\sigma] \quad (5.1-7)$$

强度计算的三大类问题:

$$\text{强度校核 } \sigma_{\max} = \frac{N_{\max}}{A} \leq [\sigma]$$

$$\text{截面设计 } A \geq \frac{N_{\max}}{[\sigma]}$$

确定许可荷载 $N_{\max} \leq [\sigma]A$, 再根据平衡条件,由 N_{\max} 计算 $[P]$ 。

5.1.8 轴向拉杆的变形 胡克定律

1. 轴向拉杆的变形

杆件在轴向拉伸时,轴向伸长,横向缩短;而在轴向压缩时,轴向缩短,横向伸长。如图

5.1-11 所示。



图 5.1-11

$$\text{轴向变形 } \Delta L = L' - L \quad (5.1-8)$$

$$\text{轴向线应变 } \varepsilon = \frac{\Delta L}{L} \quad (5.1-9)$$

$$\text{横向变形 } \Delta a = a' - a \quad (5.1-10)$$

$$\text{横向线应变 } \varepsilon' = \frac{\Delta a}{a} \quad (5.1-11)$$

2. 胡克定律

当应力不超过材料比例极限时,应力与应变成正比,即

$$\sigma = E\varepsilon \quad (5.1-12)$$

式中 E 为材料的弹性模量。

或用轴力及杆件变形量表示为

$$\Delta L = \frac{NL}{EA} \quad (5.1-13)$$

式中 EA 为杆的抗拉(压)刚度,表示杆件抵抗拉、压弹性变形的能力。

3. 泊松比

当应力不超过材料的比例极限时,横向线应变 ε' 与轴向线应变 ε 之比的绝对值为一常数,即

$$\nu = \left| \frac{\varepsilon'}{\varepsilon} \right| \quad (5.1-14)$$

泊松比 ν 是材料的弹性常数之一,无量纲。

【例 5.1-2】 图 5.1-12 所示钢木组合三角架中,钢杆 AB 的直径 $d = 28 \text{ mm}$,许用应力 $[\sigma]_1 = 160 \text{ MPa}$,弹性模量 $E_1 = 2 \times 10^5 \text{ MPa}$;木杆 BC 的横截面为正方形,边长 $a = 100 \text{ mm}$,许用应力 $[\sigma]_2 = 5 \text{ MPa}$,弹性模量 $E_2 = 1 \times 10^4 \text{ MPa}$ 。 A 、 B 、 C 节点均为铰接,在节点 B 处作用一垂直荷载 P 。

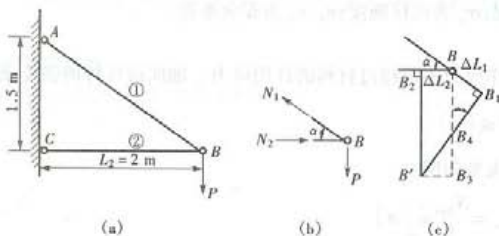


图 5.1-12

①若荷载 $P = 36 \text{ kN}$,试校核两杆的强度,并求节点 B 的位移;

②求该结构的许可荷载;

③若 P 等于许可荷载,计算钢杆的直径。

解:①校核两杆的强度。

先求各杆的内力。取节点 B 为脱离体,如图 5.1-12(b)所示。由平衡条件:

$$\sum X=0, \quad N_2 - N_1 \cos \alpha = 0$$

$$\sum Y=0, \quad N_1 \sin \alpha - P = 0$$

解得
$$N_1 = \frac{P}{\sin \alpha} = \frac{2.5P}{1.5} = \frac{5}{3}P \quad (\text{拉力})$$

$$N_2 = \cot \alpha \cdot P = \frac{2}{1.5}P = \frac{4}{3}P \quad (\text{压力})$$

两杆横截面上的应力

$$\text{钢杆 } \sigma_{AB} = \frac{N_1}{A_1} = \frac{5P}{3 \times \frac{\pi d^2}{4}} = 97.6 \text{ MPa} < [\sigma_1] = 160 \text{ MPa}$$

$$\text{木杆 } \sigma_{BC} = \frac{N_2}{A_2} = \frac{4P}{3a^2} = 4.8 \text{ MPa} < [\sigma_2] = 5 \text{ MPa}$$

所以,两杆均满足强度条件。

②求节点 B 的位移。

应先计算两杆在 P 力作用下的变形。

$$\Delta L_1 = \frac{N_1 L_1}{E_1 A_1} = \frac{\frac{5}{3} \times 36 \times 10^3 \times 2.5}{2 \times 10^{11} \times \frac{\pi}{4} \times 28^2 \times 10^{-6}} = 1.22 \text{ mm}$$

$$\Delta L_2 = \frac{N_2 L_2}{E_2 A_2} = \frac{\frac{4}{3} \times 36 \times 10^3 \times 2}{1 \times 10^{10} \times 100^2 \times 10^{-6}} = 0.96 \text{ mm}$$

然后作变形位移图。结构变形后两杆仍应相交在一点,这就是变形的相容条件。因杆 AB 受拉力而伸长 ΔL_1 , B 点移至新位置 B_1 ; 因杆 CB 受压力而缩短 ΔL_2 , B 点移至新位置 B_2 。在小变形条件下,可用切线代替圆弧来确定节点 B 的新位置。即过 B_1 和 B_2 分别作 AB_1 和 CB_2 的垂线,两垂线的交点 B' 即为节点 B 的新位置,如图 5.1-12(c) 所示。从图中可看出:

B 点的水平位移

$$\delta_H = BB_2 = \Delta L_2 = 0.96 \text{ mm} (\leftarrow)$$

B 点的垂直位移

$$\delta_V = BB_3 = BB_4 + B_4 B_3 = \frac{\Delta L_1}{\sin \alpha} + \Delta L_2 \cdot \cot \alpha = 1.22 \times \frac{2.5}{1.5} + 0.96 \times \frac{2}{1.5} = 3.31 \text{ mm} (\downarrow)$$

所以, B 点的位移

$$\delta_B = \sqrt{\delta_H^2 + \delta_V^2} = \sqrt{0.96^2 + 3.31^2} = 3.45 \text{ mm}$$

③求结构的许可荷载 $[P]$ 。

由强度条件,钢杆的许可轴力

$$[N_1] = A_1 [\sigma_1] = \frac{\pi}{4} \times 28^2 \times 10^{-6} \times 160 \times 10^6 = 98.5 \text{ kN}$$

相应的许可荷载

$$[P]_1 = \frac{3}{5} [N_1] = \frac{3}{5} \times 98.5 = 59.1 \text{ kN}$$

同理,木杆的许可轴力

$$[N_2] = A_2[\sigma]_2 = 100^2 \times 10^{-6} \times 5 \times 10^6 = 50 \text{ kN}$$

相应的许可荷载

$$[P]_2 = \frac{3}{4}[N_2] = \frac{3}{4} \times 50 = 37.5 \text{ kN}$$

为了保证两杆都能安全、正常地工作,结构的许可荷载应取上述 $[P]_1$ 、 $[P]_2$ 中的较小值,即

$$[P] = [P]_2 = 37.5 \text{ kN}$$

④重新选择钢杆的直径。

当 $P = [P] = 37.5 \text{ kN}$ 时,木杆的工作应力刚好等于许用应力,材料得到充分利用。但钢杆的工作应力比其许用应力小得多,表明它有多余的强度储备,故应重新选择钢杆的直径,使其达到既安全又经济的要求。由强度条件

$$\frac{\pi d^2}{4} \geq \frac{N_1}{[\sigma]_1} = \frac{5P}{3[\sigma]_1}$$

$$\text{得 } d \geq \sqrt{\frac{4N_1}{\pi[\sigma]_1}} = \sqrt{\frac{4 \times 5 \times 37.5 \times 10^3}{3\pi \times 160 \times 10^6}} = 2.23 \times 10^{-2} \text{ m} = 22.3 \text{ mm}$$

于是,选取钢杆直径 $d = 22 \text{ mm}$,则钢杆的工作应力比其许用应力大2.8%,在工程上允许范围($\pm 5\%$)以内。

【例 5.1-3】 如图 5.1-13(a) 所示结构, AB 杆为钢杆,横截面面积 $A_1 = 500 \text{ mm}^2$,许用应力 $[\sigma]_1 = 160 \text{ MPa}$, BC 杆为铜杆,横截面面积 $A_2 = 700 \text{ mm}^2$,许用应力 $[\sigma]_2 = 100 \text{ MPa}$ 。求该结构的许可荷载 $[P]$ 。

解:①计算各杆轴力。

在 B 点附近将杆 AB 及杆 BC 截开,取 B 节点局部作为脱离体,受力图如图 5.1-13(b) 所示。设 AB 杆的轴力为 N_1 , BC 杆的轴力为 N_2 ,且均为拉力。

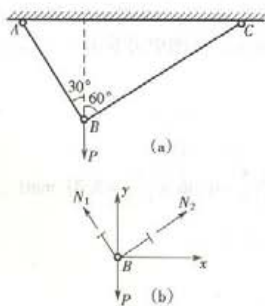


图 5.1-13

由平衡条件

$$\sum X = 0, N_2 \sin 60^\circ - N_1 \sin 30^\circ = 0$$

$$\sum Y = 0, N_1 \cos 30^\circ + N_2 \cos 60^\circ - P = 0$$

解得

$$N_1 = \frac{\sqrt{3}}{2}P, N_2 = \frac{1}{2}P$$

②计算各杆所能承受的许可轴力。

根据强度条件 $\frac{N}{A} \leq [\sigma]$,得各杆所能承受的最大轴力为

$$N_{1\max} \leq [\sigma]_1 A_1 = 160 \times 10^6 \times 500 \times 10^{-6} = 80 \text{ kN}$$

$$N_{2\max} \leq [\sigma]_2 A_2 = 100 \times 10^6 \times 700 \times 10^{-6} = 70 \text{ kN}$$

③计算两杆分别达到最大轴力时所对应的载荷。

由 $N_1 = \frac{\sqrt{3}}{2}P$ 及 $N_{1\max} = 80 \text{ kN}$,得

$$P_1 = \frac{2}{\sqrt{3}}N_1 \leq \frac{2}{\sqrt{3}}80 = 92.4 \text{ kN}$$

由 $N_2 = \frac{1}{2}P$ 及 $N_{2\max} = 70 \text{ kN}$, 得

$$P_2 = 2N_2 \leq 2 \times 70 = 140 \text{ kN}$$

④确定结构的许可载荷。

比较 P_1 和 P_2 , 取其中的最小值作为结构的许可载荷, 于是

$$[P] = 92.4 \text{ kN}$$

分析与讨论:

①杆件的许可轴力 $[N]$ 和结构的许可载荷 $[P]$ 是两个不同的概念。因为结构中各杆件并不是同时达到危险状态, 所以其许可载荷是由最先达到许可轴力的那根杆的强度所决定的。具体求解时, 可根据各个杆件的内力达到其许可轴力时所相应的许可载荷, 选其中的最小值作为整个结构的最大许可载荷。

②本例题若在求出各杆内力 $N_1 = \frac{\sqrt{3}}{2}P, N_2 = \frac{1}{2}P$ 之后, 由 BC 杆的强度条件

$$\frac{N_2}{A_2} \leq [\sigma]_2$$

及
$$N_2 = \frac{1}{2}P$$

求出 $P \leq 140 \text{ kN}$, 然后再校核 AB 杆的强度:

$$N_1 = \frac{\sqrt{3}}{2}P = 121.2 \text{ kN}$$

$$\sigma_1 = \frac{N_1}{A_1} = \frac{121.2 \times 10^3}{500 \times 10^{-6}} = 242 \text{ MPa} > [\sigma]_1 = 160 \text{ MPa}$$

强度不满足。所以应用 AB 杆的强度条件为

$$\frac{N_1}{A_1} \leq [\sigma]_1 \quad \text{及} \quad N_1 = \frac{\sqrt{3}}{2}P$$

求得 $P \leq 92.4 \text{ kN}$ 才是结构的许可载荷。比较前述介绍的方法与上述方法, 显然本质上是相同的, 但步骤上前者规范和简洁, 因而宜采用前者为好。

③常见的一种错误解法。

根据两杆所能承受的最大轴力, 由 $\sum Y = 0$, 即 $N_1 \cos 30^\circ + N_2 \cos 60^\circ - P = 0$ 来确定许可载荷 $[P]$ 。

将 $N_{1\max} \leq [\sigma]_1 A_1 = 80 \text{ kN}$ 及 $N_{2\max} \leq [\sigma]_2 A_2 = 70 \text{ kN}$ 代入方程中, 于是

$$[P] = N_{1\max} \cos 30^\circ + N_{2\max} \cos 60^\circ = 80 \times \frac{\sqrt{3}}{2} + 70 \times \frac{1}{2} = 104.3 \text{ kN}$$

这一解法的错误在于, 其一, 只考虑了平衡条件 $\sum Y = 0$, 而没有考虑 $\sum X = 0$ 。若将 $N_{1\max}$ 、 $N_{2\max}$ 代入 $\sum X = 0$ 方程中, 可发现

$$\sum X = -N_{1\max} \sin 30^\circ + N_{2\max} \sin 60^\circ \neq 0$$

这表明上述结果不能满足全部平衡条件, 因而是错误的。其二, 是因为各杆不一定会同时达到危险状态。

【例 5.1-4】 图 5.1-14(a) 所示结构, 水平杆 CBD 可视为刚性, 在 D 点加垂直向下的力

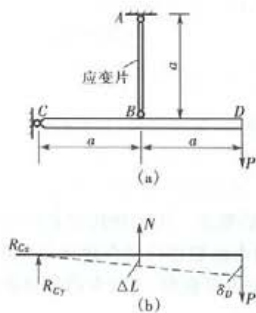


图 5.1-14

P ; AB 为钢杆, 其直径 $d = 30 \text{ mm}$, $a = 1 \text{ m}$, $E = 2 \times 10^5 \text{ MPa}$, $\sigma_p = 200 \text{ MPa}$ 。

(1) 若在 AB 杆上沿轴线方向贴有一电阻应变片, 加力后测得其应变值 $\varepsilon = 715 \times 10^{-6}$, 求这时所加的力 P 的大小;

(2) 若 AB 杆的许用应力 $[\sigma] = 160 \text{ MPa}$, 试求结构的许可载荷及此时 D 点的垂直位移。

解: ①求力 P 的大小。

取水平梁 CBD 为考察对象, 作出受力图及结构的变形位移图如图 5.1-14(b), 检验 AB 杆的变形是否在线弹性范围之内。

$$\varepsilon_p = \frac{\sigma_p}{E} = \frac{200 \times 10^6}{2 \times 10^{11}} = 1000 \times 10^{-6} > \varepsilon$$

所以钢杆变形在线弹性范围之内。因此 AB 杆中的应力

$$\sigma = E\varepsilon = 2 \times 10^{11} \times 715 \times 10^{-6} = 143 \text{ MPa}$$

AB 杆中的轴力

$$N = \sigma A = 143 \times 10^6 \times \frac{\pi}{4} (30)^2 \times 10^{-6} = 101.1 \text{ kN}$$

由平衡条件 $\sum M_C = 0$, 即

$$P \times 2a - N \times a = 0$$

求得

$$P = \frac{N}{2} = 50.5 \text{ kN}$$

②求许可载荷及 D 点位移。

由 AB 杆的强度条件, 求得杆的许可轴力为

$$[N] \leq [\sigma] A = 160 \times 10^6 \times \frac{\pi}{4} (30)^2 \times 10^{-6} = 113.1 \text{ kN}$$

并将其代入平衡方程, 得许可载荷

$$[P] = \frac{[N]}{2} = 56.5 \text{ kN}$$

由变形位移图, 可得 D 点的垂直位移

$$\delta_D = 2\Delta L = 2 \times \frac{[\sigma]}{E} \times a = 2 \times \frac{160 \times 10^6}{2 \times 10^{11}} \times 1 = 1.6 \times 10^{-3} \text{ m} = 1.6 \text{ mm} (\downarrow)$$

分析与讨论:

①在已知应变求应力的问题中, 首先应判断变形是否在线弹性范围之内, 切忌盲目使用胡克定律。

②本题求解中, 受力图及变形位移图是列平衡方程和建立变形协调关系的依据, 一定要正确画出这两种图。

【例 5.1-5】 图 5.1-15(a) 所示结构, 横梁 $ABCD$ 为刚体, 横截面面积为 76.36 mm^2 的钢索绕过无摩擦的滑轮, 弹性模量 $E = 2 \times 10^5 \text{ MPa}$, 荷载 $P = 20 \text{ kN}$ 。试求钢索内的应力和 C 点的垂直位移。

解:取横梁 AD 为考察对象,作出受力图及结构变形位移图,如图 5.1-15(b)所示。

由平衡条件 $\sum M_A = 0$,得

$$N \sin 60^\circ \times 800 + N \sin 60^\circ \times 1\,600 - P \times 1\,300 = 0$$

求得钢索拉力

$$N = 12.51 \text{ kN}$$

则钢索内的应力

$$\sigma = \frac{N}{A} = \frac{12.51 \times 10^3}{76.36 \times 10^{-6}} = 163.8 \text{ MPa}$$

由变形位移图,得变形协调关系

$$\frac{\Delta L_1}{\sin 60^\circ} \times 2 = \frac{\Delta L_2}{\sin 60^\circ}, \quad 2\Delta L_1 = \Delta L_2 \quad (1)$$

又因

$$\Delta L_1 + \Delta L_2 = \Delta L \quad (2)$$

而钢索伸长

$$\Delta L = \frac{NL}{EA} = \frac{12.51 \times 10^3 \times 1.6}{2 \times 10^{11} \times 76.36 \times 10^{-6}} = 1.31 \times 10^{-3} \text{ m} = 1.31 \text{ mm}$$

联解式(1)、(2)得

$$\Delta L_1 = \frac{\Delta L}{3} = 0.437 \text{ mm}$$

C 点位移

$$\delta_c = \frac{\Delta L_1}{\sin 60^\circ} \times \frac{1.3}{0.8} = \frac{0.437}{\sin 60^\circ} \times \frac{1.3}{0.8} = 0.82 \text{ mm}$$

分析与讨论:

①首先,解本题的关键之一是正确作出横梁 AD 的受力图,因为不计滑轮处的摩擦力,所以钢索在 B 处及 D 处对横梁的拉力是相等的;其次,固定铰支座 A 的约束反力一般有二个未知量(用分力 R_{Ax} 、 R_{Ay} 表示,本例中 $R_{Ax} = 0$ 是特殊情况)。忽略以上两点都会导致作出错误的受力图,进而列出的平衡方程也是不正确的。

②作变形位移图也是至关重要的一步。应该注意到小变形条件下可“以切线代替圆弧”,及刚性杆不变形的特点。由 AD 的垂线与 DD' 的垂线交点得 D'' , AB 的垂线与 BB' 的垂线交点得 B'' , 连 $AB''D''$ 必在一直线上。初学时易犯的错误之一是将 ΔL_1 、 ΔL_2 误认为相等,从而结构变形位移图作出来后, $AB''D''$ 不保持直线,与横梁刚性假设矛盾,可见 $\Delta L_1 = \Delta L_2$ 不成立。

5.2 剪切

要求:

- ①熟悉连接件与被连接件的受力分析;
- ②准确判定剪切面与挤压面,掌握剪切与挤压的实用计算;
- ③准确理解剪应力互等定理的意义,了解剪切胡克定律及其应用。

5.2.1 剪切的实用计算

1. 剪切的定义

剪切的力学模型如图 5.2-1 所示。

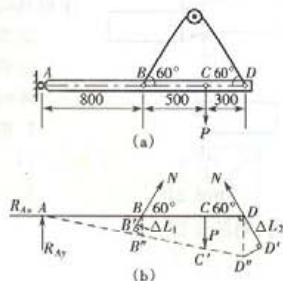


图 5.1-15

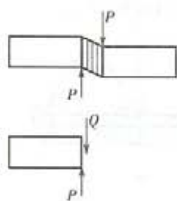


图 5.2-1

剪力,则名义剪应力

$$\tau = \frac{Q}{A_0} \quad (5.2-1)$$

(2) 许用剪应力

按实际构件的受力方式,用试验的方法求得名义剪切极限应力 τ^0 ,再除以安全系数 n 。

(3) 剪切强度条件

剪切面上的工作剪应力不得超过材料的许用剪应力

$$\tau = \frac{Q}{A_0} \leq [\tau] \quad (5.2-2)$$

5.2.2 挤压的实用计算

1. 挤压的概念

① 挤压:两构件相互接触的局部承压作用。

② 挤压面:两构件间相互接触的面。

③ 挤压力 P_{bs} :承压接触面上的总压力。

2. 挤压实用计算

(1) 名义挤压应力

假设挤压力在名义挤压面上均匀分布,则名义挤压应力

$$\sigma_{bs} = \frac{P_{bs}}{A_{bs}} \quad (5.2-3)$$

式中 A_{bs} 为名义挤压面积。当挤压面为平面时,则名义挤压面积等于实际的承压接触面积;当挤压面为曲面时,则名义挤压面积取为实际承压接触面在垂直挤压力方向的投影面积,如图 5.2-2 所示。

键的名义挤压面积

$$A_{bs} = \frac{h}{2} L$$

铆钉的名义挤压面积为

$$A_{bs} = dt$$

(2) 许用挤压应力

根据直接试验结果,按照名义挤压应力公式计算名义极限挤压应力,再除以安全系数。

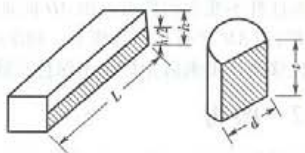


图 5.2-2

① 受力特征:构件上受到一对大小相等、方向相反,作用线相距很近且与构件轴线垂直的力作用。

② 变形特征:构件沿两力的分界面有发生相对错动的趋势。

③ 剪切面:构件将发生相对错动的面。

④ 剪力 Q :剪切面上的内力,其作用线与剪切面平行。

2. 剪切实用计算

(1) 名义剪应力

假定剪应力沿剪切面是均匀分布的。若 A_0 为剪切面面积, Q 为

(3) 挤压强度条件

挤压面上的工作挤压应力不得超过材料的许用挤压应力,即

$$\sigma_{bs} = \frac{P_{bs}}{A_{bs}} \leq [\sigma_{bs}] \quad (5.2-4)$$

5.2.3 剪应力互等定理 剪切胡克定律

1. 纯剪切

① 纯剪切:若单元体各个侧面上只有剪应力而无正应力,则称为纯剪切。纯剪切引起剪应变 γ ,如图 5.2-3 所示。

② 剪应变 γ :在剪应力作用下,单元体两相互垂直边间直角的改变量。单位为 rad,无量纲。在材料力学中规定以单元体左下直角增大时, γ 为正,反之则为负。

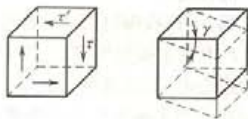


图 5.2-3

2. 剪应力互等定理

在互相垂直的两个平面上,垂直于两平面交线的剪应力,总是大小相等,且共同指向或背离这一交线(图 5.2-3),即

$$\tau = -\tau' \quad (5.2-5)$$

3. 剪切胡克定律

当剪应力不超过材料的剪切比例极限时,剪应力 τ 与剪应变 γ 成正比,即

$$\tau = G\gamma \quad (5.2-6)$$

式中 G 为材料的剪切弹性模量。

对各向同性材料, E 、 G 、 ν 间只有二个独立常数,它们之间的关系为

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (5.2-7)$$

【例 5.2-1】某接头部分的销钉如图 5.2-4 所示。试计算销钉的剪应力 τ 和挤压应力 σ_{bs} 。

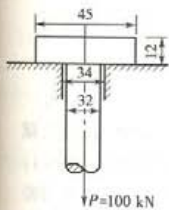


图 5.2-4

$$P_{bs} = P = 100 \text{ kN}$$

所以,剪应力

$$\tau = \frac{Q}{A_Q} = \frac{100 \times 10^3}{1206 \times 10^{-6}} = 82.9 \text{ MPa}$$

挤压应力

解:首先分析销钉的剪切面和挤压面面积。由图可见,销钉所受轴向拉力 P 将在钉头内形成一个高度为 $h = 12 \text{ mm}$ 、直径为 $d = 32 \text{ mm}$ 的圆柱形剪切面和一个外直径为 $D = 45 \text{ mm}$ 、内直径为 $d_0 = 34 \text{ mm}$ 的环形挤压面。于是得

$$A_Q = \pi dh = \pi \times 32 \times 12 = 1206 \text{ mm}^2$$

$$A_{bs} = \frac{\pi}{4} \times (D^2 - d_0^2) = \frac{\pi}{4} (45^2 - 34^2) = 683 \text{ mm}^2$$

由平衡条件得

$$Q = P = 100 \text{ kN}$$

$$\sigma_{bs} = \frac{P_{bs}}{A_{bs}} = \frac{100 \times 10^3}{683 \times 10^{-6}} = 146.4 \text{ MPa}$$

【例 5.2.2】图 5.2.5 所示接头是由中间钢板(主板)通过上下两块钢盖板对接而成。铆钉与钢板材料相同, $[\tau] = 130 \text{ MPa}$, $[\sigma_{bs}] = 300 \text{ MPa}$, $[\sigma] = 170 \text{ MPa}$; 铆钉直径 $d = 20 \text{ mm}$, 主板厚度 $t_1 = 10 \text{ mm}$, 盖板厚度 $t_2 = 6 \text{ mm}$, 主、盖板的宽度 $b = 200 \text{ mm}$ 。若 $P = 200 \text{ kN}$, 试校核该接头的强度。

解: ①校核铆钉的剪切强度。

P 力由主板传给铆钉, 再由铆钉传给盖板。当铆钉直径相同, 且外力作用线通过铆钉群截面的形心时, 假设各铆钉的受力相同, 则左侧铆钉的受力图如图 5.2.5(b) 所示。铆钉有两个剪切面。由平衡条件可得受剪面上的剪力

$$Q = \frac{P}{2n} = \frac{P}{2 \times 5} = \frac{P}{10}$$

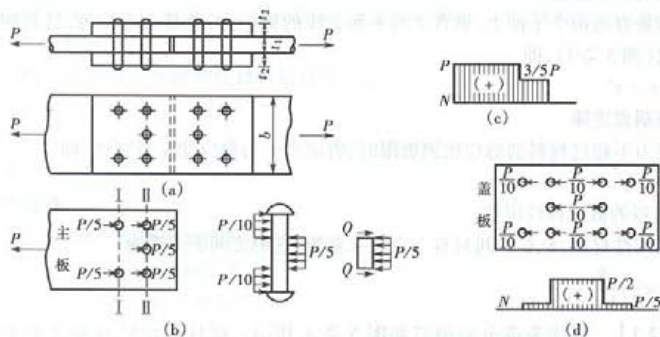


图 5.2.5

剪切面面积

$$A_Q = \frac{\pi}{4} d^2$$

故

$$\tau = \frac{Q}{A_Q} = \frac{P}{10} \cdot \frac{4}{\pi d^2} = \frac{4 \times 200 \times 10^3}{10 \times \pi \times 20^2 \times 10^{-6}} = 63.7 \text{ MPa} < [\tau]$$

②校核铆钉的挤压强度。

主板厚度小于两块盖板厚度之和, 故应校核铆钉与主板之间的挤压强度, 即

$$\sigma_{bs} = \frac{P_{bs}}{A_{bs}} = \frac{P}{dt_1} = \frac{200 \times 10^3}{5 \times 20 \times 10 \times 10^{-6}} = 200 \text{ MPa} < [\sigma_{bs}]$$

③校核主钢板的抗拉强度。

画出左边主板的受力图和轴力图, 如图 5.2.5(c) 所示。校核 I-I、II-II 截面的抗拉强度。

对 I-I 截面:

$$\sigma_I = \frac{N_I}{A_{I\text{净}}} = \frac{P}{(b-2d)t_1} = \frac{200 \times 10^3}{(200-2 \times 20) \times 10 \times 10^{-6}} = 125 \text{ MPa} < [\sigma]$$

对 II-II 截面:

$$\sigma_{II} = \frac{N_{II}}{A_{II\text{净}}} = \frac{\frac{3}{5}P}{(b-3d)t_1} = \frac{3 \times 200 \times 10^3}{5 \times (200-3 \times 20) \times 10 \times 10^{-6}} = 85.7 \text{ MPa} < [\sigma]$$

④校核盖板的抗拉强度。

盖板受力图和轴力图如图 5.2-5(d) 所示。由图可见 II-II 截面处轴力最大而截面积最小, 故 II-II 截面为盖板的危险截面, 应校核其抗拉强度。

$$\sigma_{II} = \frac{N_{II}}{A_{II\text{净}}} = \frac{\frac{P}{2}}{(b-3d)t_2} = \frac{200 \times 10^3}{2 \times (200-3 \times 20) \times 6 \times 10^{-6}} = 119 \text{ MPa} < [\sigma]$$

所以, 接头强度足够。

【例 5.2-3】图 5.2-6 所示钢板对接接头, 接头每边由两个铆钉铆接, 钢板与铆钉材料均为 Q235 钢, 已知材料的许用应力 $[\sigma] = 160 \text{ MPa}$, 许用挤压应力 $[\sigma_{bs}] = 320 \text{ MPa}$, 许用剪应力 $[\tau] = 120 \text{ MPa}$, $P = 100 \text{ kN}$, $t = 10 \text{ mm}$, $b = 150 \text{ mm}$, $d = 17 \text{ mm}$, $a = 80 \text{ mm}$ 。试校核此接头的强度。

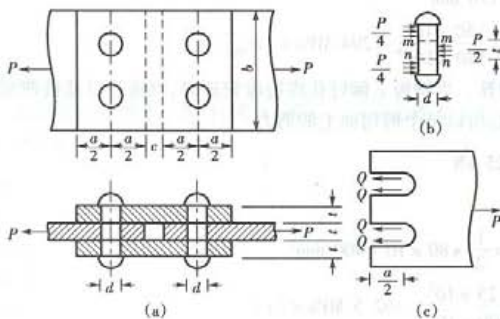


图 5.2-6

解: 应保证铆钉与钢板均安全, 所以分别对铆钉和钢板进行强度校核。

(1) 铆钉的强度校核

铆钉受力图如图 5.2-6(b) 所示。因为 P 力通过铆钉群截面形心, 且铆钉直径相同, 故假设每个铆钉受力相等。所以单个铆钉受力为 $P/2$ 。

①剪切强度计算。铆钉有两个受剪面 $m-m$ 和 $n-n$ (图 5.2-6(b)), 由截面法可知每个剪切面上的剪力

$$Q = \frac{P}{4} = 25 \text{ kN}$$

$$\text{所以 } \tau = \frac{Q}{A} = \frac{25 \times 10^3}{\frac{\pi}{4}(17)^2 \times 10^{-6}} = 110 \text{ MPa} < [\tau]$$

②挤压强度计算。由图 5.2-6(b)可见,铆钉中间段右侧面为危险挤压面,挤压力

$$P_{\text{bs}} = \frac{P}{2} = 50 \text{ kN}$$

名义挤压面积

$$A_{\text{bs}} = dt = 17 \times 10 = 170 \text{ mm}^2$$

$$\sigma_{\text{bs}} = \frac{P_{\text{bs}}}{A_{\text{bs}}} = \frac{50 \times 10^3}{170 \times 10^{-6}} = 294 \text{ MPa} < [\sigma_{\text{bs}}]$$

(2) 钢板的强度校核

①拉伸强度计算。钢板在通过铆钉孔中心处的横截面最小,其面积

$$A = (b - 2d)t = (150 - 2 \times 17) \times 10 = 1160 \text{ mm}^2$$

按截面上应力均匀分布计算,则有

$$\sigma = \frac{P}{A} = \frac{100 \times 10^3}{1160 \times 10^{-6}} = 86.2 \text{ MPa} < [\sigma]$$

②挤压强度计算。中间层钢板铆钉孔壁的挤压力

$$P_{\text{bs}} = \frac{P}{2} = 50 \text{ kN}$$

名义挤压面积

$$A_{\text{bs}} = dt = 170 \text{ mm}^2$$

所以 $\sigma_{\text{bs}} = \frac{P_{\text{bs}}}{A_{\text{bs}}} = \frac{50 \times 10^3}{170 \times 10^{-6}} = 294 \text{ MPa} < [\sigma_{\text{bs}}]$

③剪切强度计算。当钢板上铆钉孔离边缘较近时,钢板有可能被剪断(图 5.2-6(c))。图中共有四个剪切面,所以每个剪切面上的剪力

$$Q = \frac{P}{4} = 25 \text{ kN}$$

剪切面积

$$A = \frac{1}{2}at = \frac{1}{2} \times 80 \times 10 = 400 \text{ mm}^2$$

所以 $\tau = \frac{Q}{A} = \frac{25 \times 10^3}{400 \times 10^{-6}} = 62.5 \text{ MPa} < [\tau]$

校核结果表明,该铆接头强度是足够的。

分析与讨论:

①在铆钉联接计算中,当作用力 P 通过铆钉群截面形心,且铆钉直径相同时,假设各铆钉的受力相等。

②由作用与反作用原理知道,钢板对铆钉和铆钉对钢板的挤压应力是相同的。因而在钢板和铆钉的材料相同时,只需校核其一即可;在钢板和铆钉的材料不同时,只需校核许用挤压应力较小的构件。

③考虑钢板的横截面受铆钉孔的影响,对钢板的危险截面进行拉伸(压缩)强度计算时,不考虑铆钉引起的应力集中的影响,即假设正应力在危险截面上是均匀分布的。因此这也是一种近似性的实用计算。

【例 5.2-4】 图 5.2-7 所示为凸缘联轴节,已知传递的转矩 $m = 4 \text{ kN} \cdot \text{m}$,有 4 个螺栓分布在 $D = 200 \text{ mm}$ 的圆周上,螺栓的内径 $d_1 = 14.4 \text{ mm}$,轴的直径 $d = 80 \text{ mm}$,键的尺寸 $b = 20$

mm, $h = 14$ mm, $L = 140$ mm。图中 $t = 16$ mm, 键和螺栓的许用剪应力 $[\tau] = 70$ MPa, 许用挤压应力 $[\sigma_{\text{bs}}] = 200$ MPa。试校核键和螺栓的强度。

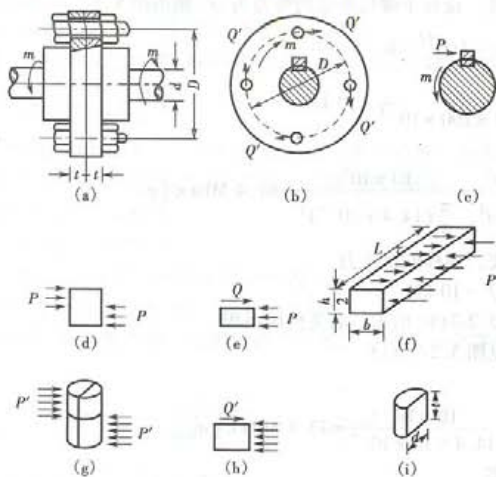


图 5.2-7

解: (1) 键的强度校核

① 校核剪切强度。键的受力如图 5.2-7(d) 所示, 图中 P 力可由图 5.2-7(e) 中轴和键的平衡条件来计算, 即 $\sum m_0 = 0$, 则

$$m - P \times \frac{d}{2} = 0$$

$$P = \frac{2m}{d} = \frac{2 \times 4}{80 \times 10^{-3}} = 100 \text{ kN}$$

用截面法可求得剪力

$$Q = P = 100 \text{ kN}$$

受剪面积

$$A = bL = 20 \times 140 = 2800 \text{ mm}^2 \text{ (见图 5.2-7(f))}$$

则剪应力

$$\tau = \frac{Q}{A} = \frac{100 \times 10^3}{2800 \times 10^{-6}} = 35.7 \text{ MPa} < [\tau]$$

② 校核挤压强度。键所受的挤压力

$$P_{\text{bs}} = 100 \text{ kN}$$

挤压面积

$$A_{\text{bs}} = L \times \frac{h}{2} = 140 \times \frac{14}{2} = 980 \text{ mm}^2 \text{ (见图 5.2-7(f))}$$

则挤压应力

$$\sigma_{\text{bs}} = \frac{P_{\text{bs}}}{A_{\text{bs}}} = \frac{100 \times 10^3}{980 \times 10^{-6}} = 102 \text{ MPa} \leq [\sigma_{\text{bs}}]$$

所以键的强度足够。

(2) 螺栓的强度校核

① 校核剪切强度。设每个螺栓所受的剪力为 Q' ，则由图 5.2-7(b) 所示部分的平衡条件

$$\sum m_0 = 0, m - 4Q' \frac{D}{2} = 0$$

$$\text{得 } Q' = \frac{m}{2D} = \frac{4}{2 \times 200 \times 10^{-3}} = 10 \text{ kN}$$

所以螺栓的剪应力

$$\tau = \frac{Q'}{A} = \frac{Q'}{\frac{\pi}{4} d_1^2} = \frac{10 \times 10^3}{\frac{\pi}{4} (14.4 \times 10^{-3})^2} = 61.4 \text{ MPa} < [\tau]$$

② 校核挤压强度。螺栓的挤压力

$$P_{bs} = P' = Q' = 10 \text{ kN}$$

如图 5.2-7(g) 和图 5.2-7(h) 所示。名义挤压面积

$$A_{bs} = d_1 t \text{ (见图 5.2-7(i))}$$

则挤压应力

$$\sigma_{bs} = \frac{P_{bs}}{A_{bs}} = \frac{10 \times 10^3}{14.4 \times 16 \times 10^{-6}} = 43.4 \text{ MPa} < [\sigma_{bs}]$$

所以螺栓的强度足够。

分析与讨论:

① 为了保证整个联接(联接件和被联接杆或板)的安全,必须根据整个联接的受力情况,全面考虑到联接可能发生的各种破坏现象,针对各种破坏形式进行强度计算。

② 关于联接件的剪切、挤压强度计算,关键是掌握各种具体联接方式中联接收件上所受的剪力、挤压力和受剪面积、挤压面积的计算。

【例 5.2-5】 图 5.2-8 所示一托架。已知 $P = 35 \text{ kN}$, 铆钉的直径 $d = 20 \text{ mm}$, 铆钉受单剪, 求最险的铆钉截面上剪应力大小及方向。

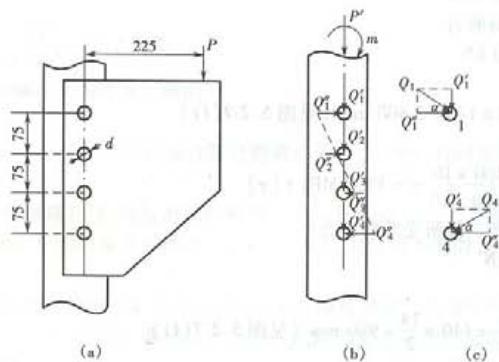


图 5.2-8

解: ① 受力分析。

因为 P 力不通过铆钉群截面形心, 所以将力 P 向铆钉群截面形心简化, 得一力

$$P' = P = 35 \text{ kN}$$

及一力偶

$$m = P \times e = 35 \times 225 \times 10^{-3} = 7.875 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

②由于力 P' 通过铆钉群形心作用, 每个铆钉受力相等, 故每个铆钉的剪力

$$Q' = Q'_2 = Q'_3 = Q'_4 = \frac{P}{4} = \frac{35}{4} \text{ kN}$$

③由于力偶 m 作用, 每个铆钉受力不等, 其大小与该铆钉离铆钉群截面形心的垂直距离成正比, 力的方向垂直于各铆钉截面形心与钉群形心间的连线, 则由

$$Q''_1 = k \times 112.5, Q''_2 = k \times 37.5$$

$$Q''_3 = k \times 37.5, Q''_4 = k \times 112.5$$

及 $m = Q''_1 \times 112.5 + Q''_2 \times 37.5 + Q''_3 \times 37.5 + Q''_4 \times 112.5$

求得 $k = 0.28, Q''_1 = Q''_4 = 31.5 \text{ kN}, Q''_2 = Q''_3 = 10.5 \text{ kN}$

④上述②、③两项计算中每个铆钉受到的两个力的合力即为每个铆钉的受力, 显见铆钉 1、4 受力最大

$$Q_1 = \sqrt{(Q'_1)^2 + (Q''_1)^2} = \sqrt{\left(\frac{35}{4}\right)^2 + (31.5)^2} = 32.69 \text{ kN}$$

$$\alpha = \arctan \frac{Q'_1}{Q''_1} = \arctan \frac{8.75}{31.5} = 15.5^\circ$$

铆钉 1 的剪应力

$$\tau_1 = \frac{Q_1}{A} = \frac{32.69 \times 10^3}{\frac{\pi}{4} (20)^2 \times 10^{-6}} = 104 \text{ MPa}$$

方向如图(c)所示。

5.3 扭转

要求:

- ①了解杆件产生扭转变形的受力特征与变形特征;
- ②了解传动轴的外力偶矩计算, 掌握求扭矩和作扭矩图的方法;
- ③掌握横截面上剪应力分布规律和剪应力的计算;
- ④掌握圆截面积惯性矩、抗扭截面系数计算公式;
- ⑤熟悉圆杆扭转的强度条件、扭转角的计算和刚度条件。

5.3.1 扭转的概念

1. 扭转的力学模型

扭转的力学模型如图 5-3-1 所示。

①受力特征: 杆两端受到一对力偶矩相等、转向相反、作用平面与杆件轴线相垂直的外力偶作用。

②变形特征: 杆件表面纵向线变成螺旋线, 即杆件任意两横截面绕杆件轴线发生相对转动。



图 5-3-1

③扭转角 φ : 杆件任意两横截面间相对转动的角度。

2. 外力偶矩的计算

轴所传递的功率、转速与外力偶矩间有如下关系:

$$T = 9.55 \frac{N(\text{kW})}{n(\text{r/min})} \quad \text{kN} \cdot \text{m} \quad (5.3-1)$$

$$T = 7.02 \frac{N(\text{Ps})}{n(\text{r/min})} \quad \text{kN} \cdot \text{m} \quad (5.3-2)$$

式中: 传递功率 N 的单位为千瓦 (kW) 或公制马力 (Ps, 1 Ps = 735.5 N · m/s); 转速 n 的单位为转每分 (r/min)。

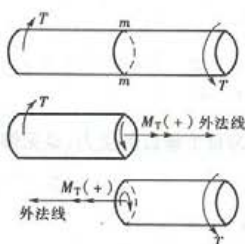


图 5.3-2

5.3.2 扭矩和扭矩图

①扭矩: 受扭杆件横截面上的内力, 是一个在截面平面内的力偶, 其力偶矩称为扭矩。用 M_T 表示, 见图 5.3-2, 其值用截面法求得。

②扭矩符号: 扭矩 M_T 的正负号规定, 以右手法则表示扭矩矢量, 当矢量的指向与截面外法线的指向一致时, 扭矩为正, 反之则为负。

③扭矩图: 表示沿杆件轴线各横截面上扭矩变化规律的图线。

5.3.3 圆杆扭转时的剪应力及强度条件

1. 横截面上的剪应力

(1) 剪应力分布规律

横截面上任一点的剪应力, 其方向垂直于该点所在的半径, 其值与该点到圆心的距离成正比, 见图 5.3-3。

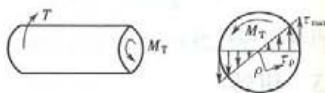


图 5.3-3

(2) 剪应力计算公式

横截面上距圆心为 ρ 的任一点的剪应力

$$\tau_\rho = \frac{M_T}{I_p} \cdot \rho \quad (5.3-3)$$

横截面上的最大剪应力发生在横截面周边各点处, 其值为

$$\tau_{\max} = \frac{M_T}{I_p} \cdot R = \frac{M_T}{W_t} \quad (5.3-4)$$

(3) 剪应力计算公式的讨论

①公式适用于线弹性范围 ($\tau_{\max} \leq \tau_p$), 小变形条件下的等截面实心或空心圆直杆。

② M_T 为所求截面上的扭矩。

③ I_p 称为极惯性矩, W_t 称为抗扭截面系数, 其值与截面尺寸有

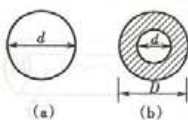


图 5.3-4

关。

对于实心圆截面 (图 5.3-4(a))

$$I_p = \frac{\pi d^4}{32}, \quad W_t = \frac{\pi d^3}{16} \quad (5.3-5)$$

对于空心圆截面(图 5.3-4(b))

$$I_p = \frac{\pi D^4}{32} (1 - \alpha^4), \quad W_t = \frac{\pi D^3}{16} (1 - \alpha^4) \quad (5.3-6)$$

其中 $\alpha = \frac{d}{D}$ 。

2. 圆杆扭转时的强度条件

强度条件:圆杆扭转时横截面上的最大剪应力不得超过材料的许用剪应力,即

$$\tau_{\max} = \frac{M_{T\max}}{W_t} \leq [\tau] \quad (5.3-7)$$

由强度条件可对受扭圆杆进行强度校核、截面设计和确定许可荷载三类问题的计算。

5.3.4 圆杆扭转时的扭转角计算及刚度条件

1. 圆杆的扭转角计算

单位长度扭转角

$$\theta = \frac{d\varphi}{dx} = \frac{M_T}{GI_p} \quad \text{rad/m} \quad (5.3-8)$$

扭转角

$$\varphi = \int_l \frac{M_T}{GI_p} dx \quad \text{rad} \quad (5.3-9)$$

若长度 L 内 M_T 、 G 、 I_p 均为常量,则

$$\varphi = \frac{M_T L}{GI_p} \quad (5.3-10)$$

公式适用于线弹性范围,小变形下的等直圆杆。 GI_p 表示圆杆抵抗扭转弹性变形的能力,称为抗扭刚度。

2. 圆杆扭转时的刚度条件

刚度条件:圆杆扭转时的最大单位长度扭转角不得超过规定的许可值,即

$$\theta_{\max} = \frac{M_{T\max}}{GI_p} \times \frac{180^\circ}{\pi} \leq [\theta] \quad (^\circ/\text{m}) \quad (5.3-11)$$

由刚度条件,同样可对受扭圆杆进行刚度校核、截面设计和确定许可荷载三类问题的计算。

【例 5.3-1】 一传动轴如图 5.3-5 所示。已知轴的直径 $d = 45 \text{ mm}$, 转速 $n = 300 \text{ r/min}$, 主动轮输入的功率 $N_A = 36.7 \text{ kW}$, 从动轮 B 、 C 、 D 输出的功率分别为 $N_B = 14.7 \text{ kW}$ 、 $N_C = N_D = 11 \text{ kW}$; 轴的材料为 45 号钢, $G = 8 \times 10^4 \text{ MPa}$, $[\tau] = 40 \text{ MPa}$, $[\theta] = 2^\circ/\text{m}$ 。试校核轴的强度和刚度。

解:(1) 计算外力偶矩

$$T_A = 9.55 \frac{N_A}{n} = 9.55 \frac{36.7}{300} = 1.168 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

$$T_B = 9.55 \frac{N_B}{n} = 9.55 \frac{14.7}{300} = 0.468 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

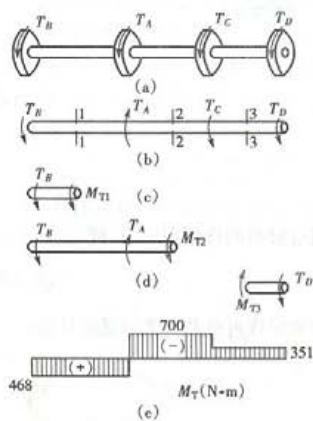


图 5.3-5

$$T_C = T_D = 9.55 \frac{N_C}{n} = 9.55 \frac{11}{300} = 0.351 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

(2) 画扭转图, 确定危险截面

用截面 1-1、2-2、3-3 分别将杆截开, 取各脱离体如图 5.3-5(b) 所示, 由平衡条件 $\sum M_x = 0$, 分别得

$$M_{T1} = -T_B = -468 \text{ N} \cdot \text{m}$$

$$M_{T2} = T_A - T_B = 1168 - 468 = 700 \text{ N} \cdot \text{m}$$

$$M_{T3} = T_D = 351 \text{ N} \cdot \text{m}$$

扭矩图如图 5.3-5(e) 所示。由图可见在 AC 段内的扭矩最大, $M_T = 700 \text{ N} \cdot \text{m}$, 因为轴是等截面的, 故 A_{i1} 至 C_{i2} 间任一横截面均为危险截面。

(3) 强度校核

$$\begin{aligned} \tau_{\max} &= \frac{M_{T\max}}{W_t} = \frac{700}{\frac{\pi}{16} \times 45^3 \times 10^{-9}} \\ &= 39.1 \text{ MPa} < [\tau] \end{aligned}$$

满足强度条件。

(4) 刚度校核

$$\theta_{\max} = \frac{M_{T\max}}{G I_p} \times \frac{180^\circ}{\pi} = \frac{700}{8 \times 10^{10} \times \frac{\pi}{32} \times 45^4 \times 10^{-12}} \times \frac{180^\circ}{\pi} = 1.25^\circ/\text{m} < [\theta]$$

满足刚度条件。

【例 5.3-2】 一直径为 d 的圆截面杆承受外力偶矩 T 后, 测得该杆表面与纵线成 45° 方向的线应变为 ε , 如图 5.3-6(a) 所示。试求其材料的剪切弹性模量 G 。

解: 圆杆表面 A 点处的剪应力

$$\tau = \frac{M_T}{W_t} = \frac{16T}{\pi d^3}$$

圆杆扭转时处于纯剪应力状态, 如图 5.3-6(b) 所示。由于剪应变 γ 单元体原来的对角线 ac , 在变形后成为 ac' , 对角线的伸长量为 $c'e''$, 对角线 ac 的线应变为

$$\varepsilon = \frac{ac' - ac}{ac} = \frac{c'e''}{ac} = \frac{\gamma dx \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}}{\sqrt{2} dx} = \frac{\gamma}{2}$$

根据剪切胡克定律

$$\tau = G\gamma$$

$$\text{得 } G = \frac{\tau}{\gamma} = \frac{\frac{16T}{\pi d^3}}{\frac{\tau}{2\varepsilon}} = \frac{8T}{\varepsilon \pi d^3}$$

【例 5.3-3】 阶梯轴 ABC 受外力偶作用 (如图 5.3-7)。已知 AB、BC 段直径分别为 $d_1 = 75$

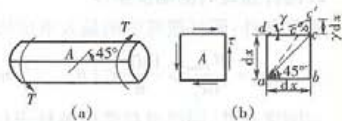


图 5.3-6

mm 和 $d_2 = 60$ mm, 材料的许用剪应力 $[\tau] = 60$ MPa, 许用单位扭转角 $[\theta] = 0.6^\circ/\text{m}$, 材料的扭转模量 $G = 80$ GPa。求: ①校核轴的强度; ②C 截面相对 A 截面的扭转角, 并进行轴的刚度校核。

解: ①计算扭矩并作扭矩图。

由外力偶矩可直接得到

$$M_{TBC} = -1.5 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

$$M_{TAB} = 2.5 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

其扭矩图见图 5.3-7(b)。

②计算最大剪应力和强度校核。

由于 AB 段扭矩大, 而 BC 段直径小, 因而不能直接确定最大剪应力发生在哪一段截面上, 需分别计算两段截面上最大剪应力值。

AB 段

$$\tau_{\max 1} = \frac{M_{TAB} \times 16}{\pi d_1^3} = \frac{2.5 \times 10^3 \times 16}{\pi \times 75^3 \times 10^{-9}} = 30.2 \text{ MPa}$$

BC 段

$$\tau_{\max 2} = \frac{M_{TBC} \times 16}{\pi d_2^3} = \frac{1.5 \times 10^3 \times 16}{\pi \times 60^3 \times 10^{-9}} = 35.4 \text{ MPa}$$

由计算结果知, 最大剪应力发生在 BC 段截面的周边上, 即

$$\tau_{\max} = 35.4 \text{ MPa} < [\tau]$$

故满足强度要求。

③计算变形和刚度校核。

因 AB、BC 段上的扭矩和截面各自不变, 可用式 5.3-10 分别计算相对扭转角, 然后相加, 即

$$\begin{aligned} \varphi_{AC} &= \varphi_{AB} + \varphi_{BC} = \frac{M_{TAB} L_{AB} 180^\circ}{G I_p \pi} + \frac{M_{TBC} L_{BC} 180^\circ}{G I_p \pi} \\ &= \frac{2.5 \times 10^3 \times 800 \times 10^{-3} \times 32180^\circ}{80 \times 10^9 \times \pi \times 75^4 \times 10^{-12} \pi} + \frac{1.5 \times 10^3 \times 100 \times 10^{-3} \times 32180^\circ}{80 \times 10^9 \times \pi \times 60^4 \times 10^{-12} \pi} = 0.35^\circ \end{aligned}$$

C 截面相对 A 截面的扭转角为正, 说明 C 截面的转动方向同 T_{AB} 的转向。

进行刚度校核时, 需计算最大单位扭转角, 即

$$\begin{aligned} \theta_{AB} &= \frac{M_{TAB} 180^\circ}{G I_{p1} \pi} = \frac{2.5 \times 10^3 \times 32}{80 \times 10^9 \times \pi \times 75^4 \times 10^{-12} \pi} \times \frac{180^\circ}{\pi} = 0.577^\circ/\text{m} \\ \theta_{BC} &= \left| \frac{M_{TBC} 180^\circ}{G I_{p2} \pi} \right| = \frac{1.5 \times 10^3 \times 32}{80 \times 10^9 \times \pi \times 60^4 \times 10^{-12} \pi} \times \frac{180^\circ}{\pi} = 0.845^\circ/\text{m} \end{aligned}$$

显然 $\theta_{\max} = \theta_{BC} = 0.845^\circ/\text{m} > [\theta]$

刚度不符合要求。

分析与讨论:

①对截面、扭矩变化的轴必须计算出全轴中的最大剪应力和最大单位扭转角, 然后从强度和刚度分别考虑, 才能保证轴安全正常工作。

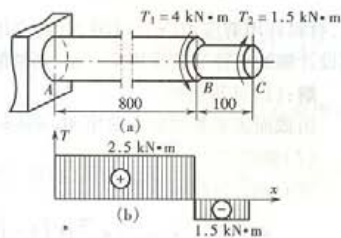


图 5.3-7

②计算相对扭转角时应注意分段,总扭转角为各段扭转角的代数和。各段的扭转角的正、负号,可由该段扭矩的正、负表示。

【例 5.3-4】空心圆轴内外径之比 $\frac{d}{D} = \frac{1}{2}$,壁厚 $t = 2.5 \text{ mm}$,受外力偶 $m = 1.98 \text{ kN} \cdot \text{m}$ 作用,材料许用剪应力 $[\tau] = 100 \text{ MPa}$,许用单位扭转角 $[\theta] = 2^\circ/\text{m}$,剪切弹性模量 $G = 80 \text{ GPa}$ 。试设计轴的直径。若采用实心轴,则轴的直径应多大,并比较空心轴与实心轴的用量。

解:(1)计算扭矩

由截面法求各截面上扭矩 $M_T = m = 1.98 \text{ kN} \cdot \text{m}$

(2)强度设计

空心轴抗扭截面系数

$$W_t = \frac{\pi D^3}{16} (1 - \alpha^4) = \frac{\pi D^3}{16} \left(1 - \left(\frac{1}{2} \right)^4 \right) = \frac{15\pi D^3}{256}$$

由强度条件

$$\tau_{\max} = \frac{M_T}{W_t} \leq [\tau]$$

$$\text{可得 } D \geq \sqrt[3]{\frac{M_T \times 256}{[\tau] \times 15 \times \pi}} = \sqrt[3]{\frac{1.98 \times 10^3 \times 256}{100 \times 10^6 \times 15 \times 3.14}} = 4.76 \times 10^{-2} \text{ m}$$

取 $D = 48 \text{ mm}$,则 $d = 24 \text{ mm}$ 。

(3)刚度设计

空心轴极惯性矩

$$I_p = \frac{\pi D^4}{32} \left[1 - \left(\frac{1}{2} \right)^4 \right] = \frac{15\pi D^4}{512}$$

由刚度条件得

$$D \geq \sqrt[4]{\frac{M_T}{G[\theta]} \times \frac{180^\circ}{\pi} \times \frac{512}{15\pi}} = \sqrt[4]{\frac{1.98 \times 10^3 \times 512 \times 180^\circ}{80 \times 10^9 \times 2^\circ \times \pi^2 \times 15}} = 5.28 \times 10^{-2} \text{ m} = 52.8 \text{ mm}$$

则 $d = 26.4 \text{ mm}$

为同时满足强度和刚度要求,空心轴应取外径 $D = 52.8 \text{ mm}$,内径 $d = 26.4 \text{ mm}$ 。

(4)实心轴直径 d_1 设计

根据强度条件

$$d_1 \geq \sqrt[3]{\frac{16M_T}{\pi[\tau]}} = \sqrt[3]{\frac{16 \times 1.98 \times 10^3}{\pi \times 100 \times 10^6}} = 4.66 \times 10^{-2} \text{ m}$$

取 $d_1 = 46.6 \text{ mm}$ 。

按刚度条件

$$d_1 \geq \sqrt[4]{\frac{32M_T \times 180^\circ}{G\pi^2[\theta]}} = \sqrt[4]{\frac{3.2 \times 1.98 \times 10^3 \times 180^\circ}{80 \times 10^9 \times \pi^2 \times 2^\circ}} = 5.18 \times 10^{-2} \text{ m}$$

取 $d_1 = 51.8 \text{ mm}$ 。

综合强度和刚度要求,应取实心轴直径 $d_1 = 51.8 \text{ mm}$ 。

(5)比较用量

设轴的材料、长度相同,则质量比等于轴的横截面积比

$$\frac{Q_{\text{空}}}{Q_{\text{实}}} = \frac{\frac{\pi}{4}(D^2 - d^2)}{\frac{\pi}{4}d_1^2} = \frac{52.8^2 - 26.4^2}{51.8^2} = 0.78$$

分析与讨论:

由上可以看出,采用空心轴不仅节省材料而且可减轻轴的质量。究其原因,可以从以下两方面作出解释。

①从应力分布规律知,靠近轴心附近应力很小。因此,实心轴轴心附近材料没有发挥有效作用。

②从截面几何性质分析,空心轴的材料分布离轴心愈远,其抗扭截面系数 W , 和极惯性矩 I_p 愈大,从而提高了轴的抗扭强度和刚度。

5.4 截面图形的几何性质

要求:

①了解静矩和形心、轴惯性矩和惯性积的概念,熟悉简单图形静矩、形心惯性矩和惯性积的计算;

②掌握轴惯性矩和惯性积的平行移轴公式及其应用;

③准确理解形心主轴和形心主惯性矩的概念,熟悉常见有一对称轴的组合截面形心主惯性矩的计算。

5.4.1 静矩与形心

1. 定义

设任意形状截面图形的面积为 A (图 5.4-1), 则图形

$$\left. \begin{aligned} \text{对 } z \text{ 轴的静矩 } S_z &= \int_A y dA = y_c A \\ \text{对 } y \text{ 轴的静矩 } S_y &= \int_A z dA = z_c A \end{aligned} \right\} \quad (5.4-1)$$

$$\left. \begin{aligned} y_c &= \frac{S_z}{A} \\ z_c &= \frac{S_y}{A} \end{aligned} \right\} \quad (5.4-2)$$

形心 C 的坐标

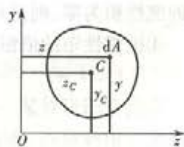


图 5.4-1

2. 特征

①静矩是对一定的轴而言的,同一图形对不同坐标轴的静矩不同。静矩可能为正、为负或为零。

②静矩的量纲为 $[L^3]$, 单位为 m^3 。

③图形对任一形心轴的静矩为零;反之,若图形对某一轴的静矩为零,则该轴必通过图形的形心。

④若截面图形有对称轴,则图形对于对称轴的静矩必为零,图形的形心一定在此对称轴上。

⑤组合图形对某一轴的静矩,等于各组分图形对同一轴静矩

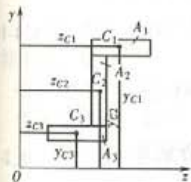


图 5.4-2

的代数和(图 5.4-2), 即

$$\left. \begin{aligned} S_y &= \sum_{i=1}^n S_{y_i} = \sum_{i=1}^n z_{c_i} A_i \\ S_z &= \sum_{i=1}^n S_{z_i} = \sum_{i=1}^n y_{c_i} A_i \end{aligned} \right\} \quad (5.4-3)$$

5.4.2 惯性矩和惯性积

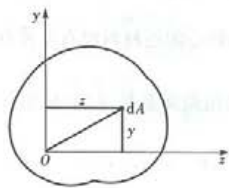


图 5.4-3

1. 定义

设任意形状截面图形的面积为 A (图 5.4-3), 则图形

$$\left. \begin{aligned} \text{对 } y \text{ 轴的惯性矩} \quad I_y &= \int_A z^2 dA \\ \text{对 } z \text{ 轴的惯性矩} \quad I_z &= \int_A y^2 dA \end{aligned} \right\} \quad (5.4-4)$$

$$\text{对 } O \text{ 点的极惯性矩} \quad I_p = \int_A \rho^2 dA \quad (5.4-5)$$

$$\text{对 } y, z \text{ 轴的惯性积} \quad I_{yz} = \int_A yz dA \quad (5.4-6)$$

2. 特征

① 图形的极惯性矩是对某一极点定义的, 轴惯性矩是对某一坐标轴定义的, 惯性积是对某一对坐标轴定义的。

② 极惯性矩、轴惯性矩、惯性积的量纲为 $[L^4]$, 单位为 m^4 。

③ 极惯性矩、轴惯性矩其数值均为正; 惯性积的数值可正可负, 也可能为零。若一对坐标轴中有一轴为图形的对称轴, 则图形对这一对坐标轴的惯性积必等于零; 但图形对某一坐标轴的惯性积为零, 则这对坐标轴中不一定有图形的对称轴。

④ 极惯性矩的值恒等于以该点为原点的任一对坐标轴的轴惯性矩之和, 即

$$I_p = I_y + I_z \quad (5.4-7)$$

⑤ 组合图形对某一点的极惯性矩或对某一轴的轴惯性矩, 分别等于各组分图形对同一点的极惯性矩或对同一轴的轴惯性矩之和, 即

$$I_p = \sum_{i=1}^n I_{p_i} \quad (5.4-8)$$

$$I_y = \sum_{i=1}^n I_{y_i}, \quad I_z = \sum_{i=1}^n I_{z_i} \quad (5.4-9)$$

组合图形对某一对坐标轴的惯性积, 等于各组分图形对同一对坐标轴的惯性积之和, 即

$$I_{yz} = \sum_{i=1}^n I_{yz_i} \quad (5.4-10)$$

5.4.3 惯性半径

1. 定义

任意形状截面图形的面积为 A , 则图形对 y 轴和 z 轴的惯性半径分别为

$$\left. \begin{aligned} i_y &= \sqrt{\frac{I_y}{A}} \\ i_z &= \sqrt{\frac{I_z}{A}} \end{aligned} \right\} \quad (5.4-11)$$

2. 特征

- ① 惯性半径是对某一坐标轴定义的。
- ② 惯性半径的量纲为[L], 单位为 m。
- ③ 惯性半径的数值恒取正值。

5.4.4 平行移轴公式

设任意形状截面图形的面积为 A (图 5.4-4), 形心为 C , 图形对形心轴 y_c, z_c 的轴惯性矩分别为 I_{y_c}, I_{z_c} , 惯性积为 $I_{y_c z_c}$, 则图形对平行于形心轴的坐标轴 y, z 的惯性矩和惯性积分别为

$$I_y = I_{y_c} + b^2 A \quad (5.4-12)$$

$$I_z = I_{z_c} + a^2 A \quad (5.4-13)$$

$$I_{yz} = I_{y_c z_c} + abA$$

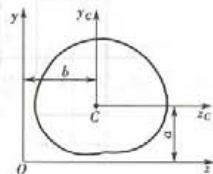


图 5.4-4

运用上述公式时应注意:

- ① 利用平行移轴公式计算必须从形心轴出发; a, b 是形心 C 在新坐标系 y, z 中的坐标, 所以是有正负的;
- ② 在所有相互平行的坐标轴中, 图形对形心轴的惯性矩为最小, 但图形对形心轴的惯性积不一定是最小。

5.4.5 形心主轴和形心主惯矩

① 主惯性轴: 截面图形对于某一对正交坐标轴的惯性积为零, 则这对轴称为主惯性轴, 简称主轴。即 $I_{yz} = 0$ 时, y, z 轴即为主轴。主轴的方位

$$\tan 2\alpha_0 = \frac{-2I_{yz}}{I_z - I_y} \quad (5.4-14)$$

② 主惯矩: 截面图形对主轴的惯性矩, 称为主惯矩。它是图形对过同一点的所有坐标轴的惯性矩中的最大值和最小值, 其值为

$$I_{\max} = \frac{I_z + I_y}{2} + \sqrt{\left(\frac{I_z - I_y}{2}\right)^2 + I_{yz}^2} \quad (5.4-15)$$

$$I_{\min} = \frac{I_z + I_y}{2} - \sqrt{\left(\frac{I_z - I_y}{2}\right)^2 + I_{yz}^2} \quad (5.4-16)$$

且 $I_{\max} + I_{\min} = I_z + I_y$

- ③ 形心主轴: 通过图形形心的一对主轴。
 - ④ 形心主惯矩: 截面图形对形心主轴的惯性矩。
- 可以证明:
- ① 若图形有一根对称轴, 则此轴即为形心主轴之一, 另一形心主轴为通过图形形心并与对称轴垂直的轴;
 - ② 若图形有二根对称轴, 则此二轴即为形心主轴;
 - ③ 若图形有三根以上对称轴时, 则通过形心的任一轴均为形心主轴, 且主惯矩相等。

5.4.6 常用简单图形的惯矩 (图 5.4-5)

$$\text{矩形 } I_z = \frac{bh^3}{12}, I_y = \frac{hb^3}{12} \quad (5.4-17)$$

$$\text{圆形 } I_z = \frac{\pi d^4}{64} \quad (5.4-18)$$

$$\text{空心圆截面 } I_x = \frac{\pi D^4}{64} (1 - \alpha^4), \alpha = \frac{d}{D} \quad (5.4-19)$$

【例 5.4-1】 试求图 5.4-6 所示截面图形的形心主惯矩。

解: y 轴为图形的对称轴, 故为形心主轴之一。

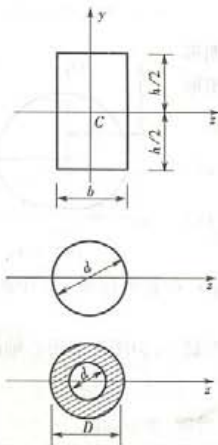


图 5.4-5

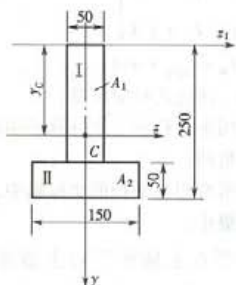


图 5.4-6

(1) 求形心 C

图 5.4-6 所示截面可看做由矩形 I 和矩形 II 组成, 其面积各为

$$A_I = 200 \times 50 = 10\,000 \text{ mm}^2$$

$$A_{II} = 50 \times 150 = 7\,500 \text{ mm}^2$$

以 z_1 轴为参考坐标, 则

$$y_c = \frac{S_{z_1}}{A} = \frac{200 \times 50 \times 100 + 50 \times 150 \times 225}{200 \times 50 + 50 \times 150} = 153.6 \text{ mm}$$

过形心 C 作垂直 y 轴的 z 轴, 则 y, z 轴即为形心主轴。

(2) 求形心主惯矩

$$I_y = I_{y,I} + I_{y,II} = \frac{200 \times 50^3}{12} + \frac{50 \times 150^3}{12} = 1.61 \times 10^7 \text{ mm}^4$$

$$\begin{aligned} I_z &= I_{z,I} + I_{z,II} = \frac{50 \times 200^3}{12} + 50 \times 200 \times (53.6)^2 + \frac{150 \times 50^3}{12} + 50 \times 150 \times (71.4)^2 \\ &= 1.018 \times 10^8 \text{ mm}^4 \end{aligned}$$

5.5 弯曲

要求:

(一) 弯曲内力

① 了解平面弯曲的概念, 熟悉具有纵对称面的梁产生平面弯曲的条件;

- ②熟悉梁内剪力、弯矩的正负号规定；
- ③熟练掌握用截面法求指定截面的剪力、弯矩；
- ④掌握作剪力图、弯矩图的基本方法——列出剪力方程和弯矩方程，然后，依据这些方程作图；
- ⑤掌握 q 、 Q 、 M 之间的微分关系及应用于检查 Q 、 M 图的正确性。

(二) 弯曲应力

- ①了解中性轴的概念及其在截面上的位置；
- ②掌握横截面上正应力的分布规律及其计算公式，明确弯曲正应力公式的适用条件；
- ③熟悉工程上常用截面（圆形、矩形）的轴惯性矩、抗弯截面系数的计算公式；熟悉中性轴为截面对称轴或非对称轴时的正应力强度条件；
- ④熟悉常见截面剪应力的分布规律及剪应力计算公式；
- ⑤了解梁的合理截面形状，了解弯曲中心的概念。

(三) 弯曲变形

- ①熟悉列出梁挠曲线近似微分方程的步骤；
- ②用积分法求解梁的位移时，能正确写出梁的边界条件和连续条件；
- ③利用梁在简单荷载下的变位结果，会用叠加法求梁的位移。

5.5.1 弯曲内力

1. 平面弯曲的概念

弯曲变形是杆件的基本变形之一。以弯曲为主要变形的杆件通常称为梁。

(1) 弯曲变形特征

任意两横截面绕垂直杆轴线的轴作相对转动，同时杆的轴线也弯成曲线。

(2) 平面弯曲

荷载作用面（外力偶作用面或横向力与梁轴线组成的平面）与弯曲平面（即梁轴线弯曲后所在平面）相平行或重合的弯曲，如图 5.5-1 所示。

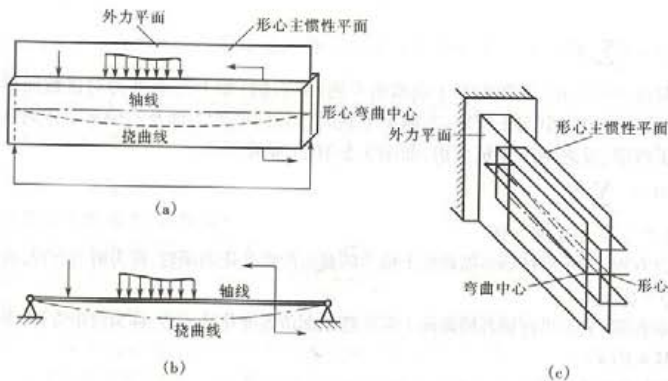


图 5.5-1

产生平面弯曲的条件如下。

①梁具有纵对称面时,只要外力(横向力或外力偶)都作用在此纵对称面内。

②对非对称截面梁,纯弯曲时,只要外力偶作用在与梁的形心主惯性平面(即梁的轴线与其横截面的形心主惯性轴所构成的平面)平行的平面内;横向弯曲时,横向力必须通过横截面的弯曲中心并在与梁的形心主惯性平面平行的平面内。

2. 梁横截面上的内力分量——剪力与弯矩

(1) 剪力与弯矩

①剪力:梁横截面上切向分布内力的合力,称为剪力,以 Q 表示。

②弯矩:梁横截面上法向分布内力形成的合力偶矩,称为弯矩,以 M 表示。

③剪力与弯矩的符号:考虑梁微段 dx ,使右侧截面对左侧截面产生向下相对错动的剪力为正,反之为负;使微段产生凹向上的弯曲变形的弯矩为正,反之为负,如图 5.5-2(b) 所示。

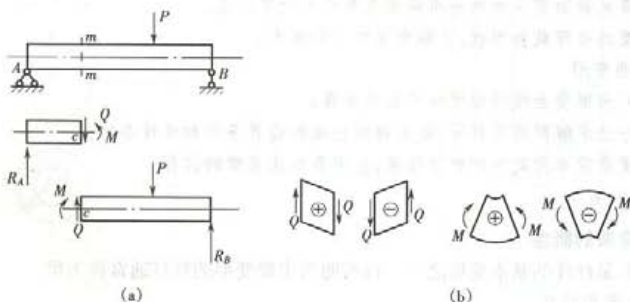


图 5.5-2

由截面法可知以下两点。

①横截面上的剪力,其数值等于该截面左侧(或右侧)梁上所有外力在横截面方向的投影代数和;且左侧梁上向上的外力或右侧梁上向下的外力引起正剪力,反之则引起负剪力,见图 5.5-2(a)。

$$Q = \sum_{x_i(t)} Y_i$$

②横截面上的弯矩,其数值等于该截面左侧(或右侧)梁上所有外力对该截面形心的力矩代数和;且向上外力均引起正弯矩,左侧梁上顺时针转向的外力偶及右侧梁上逆时针转向的外力偶引起正弯矩,反之则产生负弯矩,如图 5.5-2(a) 所示。

$$M = \sum_{x_i(t)} M_{C_i}$$

(2) 剪力方程与弯矩方程

①剪力方程:表示沿杆轴各横截面上剪力随截面位置变化的函数,称为剪力方程,表示为

$$Q = Q(x)$$

②弯矩方程:表示沿杆轴各横截面上弯矩随截面位置变化的函数,称为弯矩方程,表示为

$$M = M(x)$$

(3) 剪力图与弯矩图

①剪力图:表示沿杆轴各横截面上剪力随截面位置变化的图线,称为剪力图。

②弯矩图:表示沿杆轴各横截面上弯矩随截面位置变化的图线,称为弯矩图。

3. 荷载集度与剪力、弯矩间的关系及应用

(1) q 、 Q 、 M 间的微分关系

设荷载集度 $q(x)$ 为截面位置 x 的连续函数,且规定以向上为正,则有

$$\frac{dQ(x)}{dx} = q(x) \quad (5.5-1)$$

$$\frac{dM(x)}{dx} = Q(x) \quad (5.5-2)$$

$$\frac{d^2M(x)}{dx^2} = \frac{dQ(x)}{dx} = q(x) \quad (5.5-3)$$

(2) 应用

① 校核剪力图、弯矩图的正确性。根据一阶导数的几何意义,式 5.5-1 和式 5.5-2 表明剪力图上某点的切线斜率等于梁上相应点处的荷载集度,弯矩图上某点的切线斜率等于梁上相应截面上的剪力。

由式 5.5-3 的几何意义可根据 $M(x)$ 对 x 二阶导数的正负,定出 $M(x)$ 图的凹向。若 $q(x) > 0$,则 M 图为上凸的曲线;若 $q(x) < 0$,则 M 图为下凸的曲线;若 $q(x) = 0$,则 M 图为直线。

② 利用微分关系作剪力图和弯矩图。由式 5.5-1 可得

$$\int_A^B dQ(x) = \int_A^B q(x) dx$$

$$Q_B - Q_A = \omega_{AB} \quad (5.5-4)$$

即截面 B 上的剪力与截面 A 上的剪力之差等于梁上 AB 间荷载集度 $q(x)$ 图的面积,但两截面之间必须无集中外力作用。

同理由式 5.5-2 可得

$$\int_A^B dM(x) = \int_A^B Q(x) dx$$

$$M_B - M_A = \Omega_{AB} \quad (5.5-5)$$

即截面 B 上的弯矩与截面 A 上的弯矩之差等于梁上 AB 间剪力图的面积,但两截面之间必须无集中力偶作用。

于是可由式 5.5-1、式 5.5-2,根据梁上已知的荷载集度,判定剪力、弯矩图的图线形状、凹向等;而由式 5.5-4、式 5.5-5 或由截面法 $Q = \sum_{k \in (x)} Y_k, M = \sum_{k \in (x)} M_k$ 确定控制截面的剪力、弯矩值,即可绘制剪力、弯矩图。













4. 特殊截面上的剪力、弯矩值

① 在集中力作用的截面处, Q 图有突变, M 图形成尖角。突变值等于集中力的大小,突变方向与集中力作用方向一致。

② 在集中力偶作用处, Q 图无变化,但 M 图有突变。其突变值等于该力偶之矩,突变方向看该力偶对后半段梁的影响,即该力偶对后半段梁产生正弯矩,则向正方向突变,否则反之。

现将本节中有关弯矩、剪力与荷载间的关系以及剪力图和弯矩图的一些特征汇总整理为表 5.5-1,以供参考。

表 5.5-1 几种荷载下剪力图与弯矩图的特征

一段梁上受外力的情况	向下的均布荷载 	无荷载 	集中力 	集中力偶 
剪力图上的特征	向下倾斜的直线 	水平直线, 一般为 	在 C 处有突变 	在 C 处无变化 
弯矩图上的特征	下凸的二次抛物线 	一般为斜直线 	在 C 处有尖角 	在 C 处有突变 
最大弯矩所在截面的可能位置	在 $Q=0$ 的截面		在剪力变号的截面	在紧靠 C 点的某一侧的截面

【例 5.5-1】图 5.5-3 所示悬臂梁, 承载如图。试列出剪力方程、弯矩方程, 作 Q 、 M 图。

解: 因梁上荷载不连续, 故需分段列方程。

用任意截面 $n-n$ 截开梁, 取左部为脱离体, 如图 5.5-3(b) 所示。由 $\sum Y=0$, 得

$$Q(x) = 0 \quad (0 \leq x < a)$$

由 $\sum M=0$, 得

$$M(x) = m = Pa \quad (0 < x \leq a)$$

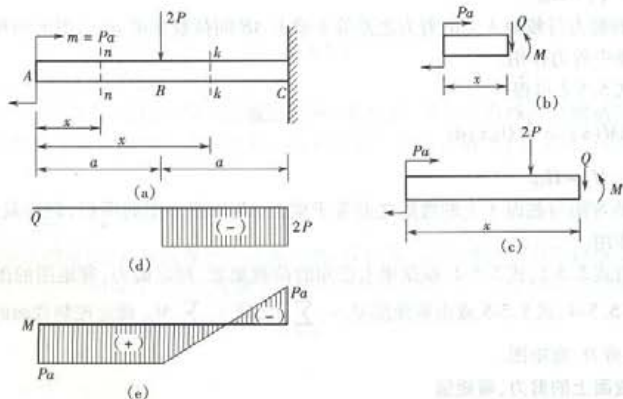


图 5.5-3

同理用任意截面 $k-k$ 截开梁, 取左部为脱离体如图 5.5-3(c) 所示。由 $\sum Y=0$, 得

$$Q(x) = -2P \quad (a < x < 2a)$$

由 $\sum M=0$, 得

$$M(x) = m - 2P(x-a) = Pa - 2P(x-a) \quad (a \leq x < 2a)$$

根据剪力方程、弯矩方程作图。对于线性方程只需算出各段的端值然后连直线即可。

图M图如图(d)、(e)所示。

【例 5.5-2】 写出图 5.5-4 所示梁的剪力方程和弯矩方程,并作剪力图和弯矩图。

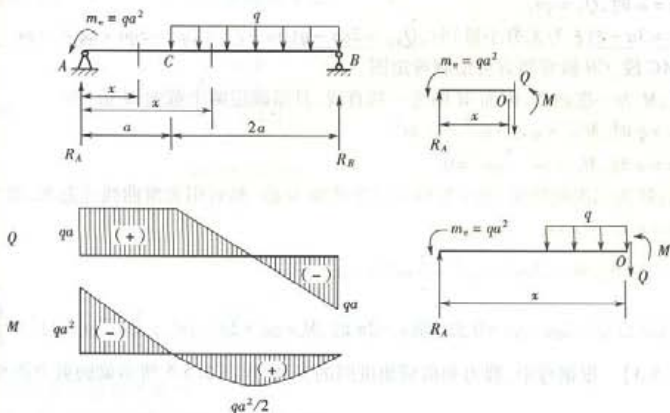


图 5.5-4

解:(1)求支座反力

$$\sum M_A = 0, m_e + 3a \times R_B - 2a \times 2aq = 0$$

$$R_B = qa (\uparrow)$$

$$\sum M_B = 0, m_e + 2aq \times a - 3aR_A = 0$$

$$R_A = qa (\uparrow)$$

$$\text{校核 } \sum Y = R_A + R_B - 2qa = qa + qa - 2qa = 0.$$

故所求的支座反力正确。

(2)分段建立剪力方程和弯矩方程

AC段:

$$\sum Y = 0, R_A - Q = 0$$

$$Q = R_A = qa \quad (0 < x \leq a)$$

$$\sum M_O = 0, m_e + M - R_A x = 0$$

$$M = R_A x - m_e = qax - qa^2 \quad (0 < x \leq a)$$

CB段:

$$\sum Y = 0, R_A - q(x-a) - Q = 0$$

$$Q = R_A - q(x-a) = 2qa - qx \quad (a \leq x < 3a)$$

$$\sum M_C = 0, qa^2 + M - R_A x + \frac{1}{2}q(x-a)^2 = 0$$

$$M = qax - qa^2 - \frac{1}{2}q(x-a)^2 \quad (a \leq x \leq 3a)$$

(3)作剪力图和弯矩图

根据 AC 段、CB 段剪力方程绘制剪力图。

AC段: Q 为常量, 故 Q 图为水平线。

CB段: Q 为一次函数, 因而 Q 图为斜直线, 只需确定两个截面 Q 值, 即

$$x = a \text{ 时, } Q_c = qa$$

$$x = 3a - \xi (\xi \text{ 为无穷小量}) \text{ 时, } Q_{B\pm} = 2qa - q(3a - \xi) = 2qa - 3qa + q\xi = -qa$$

根据 AC 段、CB 段弯矩方程绘制弯矩图。

AB段: M 为一次函数, 因而 M 图为一斜直线, 只需确定两个截面 M 值, 即

$$x > \xi \text{ 时, } M_{A\pm} = qa\xi - qa^2 = -qa^2$$

$$x = a \text{ 时, } M_c = qa^2 - qa^2 = 0$$

CB段: M 为二次抛物线, 至少要确定三个截面 M 值, 然后用光滑曲线连起来, 即

$$x = a \text{ 时, } M_c = 0$$

$$x = 3a \text{ 时, } M_b = 3qa^2 - qa^2 - \frac{1}{2}q(3a - a)^2 = 0$$

抛物线顶点 $Q = 2qa - qx = 0$ 处, 即 $x = 2a$ 时, $M = qa \times 2a - qa^2 - \frac{1}{2}q(2a - a)^2 = \frac{1}{2}qa^2$

【例 5.5-3】 根据弯矩、剪力和荷载集度间的关系, 作图 5.5-5 所示梁的剪力图和弯矩图。

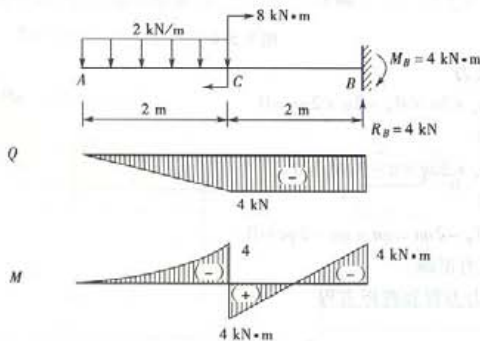


图 5.5-5

解: 首先求支座反力 (悬臂梁可以不求)。

$$R_B = 4 \text{ kN} (\uparrow)$$

$$M_B = 4 \text{ kN} \cdot \text{m} (\curvearrowright)$$

根据 q 、 Q 、 M 关系作 Q 、 M 图通常步骤如下。

①分段: 根据梁上荷载不连续点 (集中力、集中力偶作用处, 分布荷载起止点) 为界点。

②定形: 根据各段荷载情况, 定出 Q 、 M 图形状。

③定控制截面 Q 、 M 值: 用截面法, 则

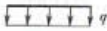
$$Q = \sum_{\text{左}(i)} Y_i, M = \sum_{\text{左}(i)} M_{Ci}$$

或用积分关系式

$$Q_B - Q_A = \int_A^B q dx$$

$$M_B - M_A = \int_A^B Q dx$$

本例题的分段和定 Q 、 M 形状情况见下表。

	AC 段	CB 段
荷载		无
Q	向下倾斜的直线 (-)	水平直线 (-)
M	下凸的二次抛物线	斜直线

有关控制截面值确定如下。

① Q 图: AC 段定两个控制截面值, 即

$$Q_A = 0$$

$$Q_C = \sum Y_i = -4 \text{ kN}$$

$$\text{或 } Q_C = Q_A + \int_A^C q dx = \text{AC 段荷载图面积} = -4 \text{ kN}$$

CB 段定一个控制截面值, Q_C 已求出。

② M 图: AC 段至少定三个控制截面值, 即

$$M_A = 0$$

$$M_{C_{\Sigma}} = \sum M_i = -\frac{1}{2} \times 2 \times 2 \times 2 = -4 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

$$\text{或 } M_{C_{\Sigma}} = M_A + \int_A^{C_{\Sigma}} Q dx = \text{AC}_{\Sigma} \text{ 段 } Q \text{ 图面积} = -\frac{1}{2} \times 2 \times 4 = -4 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

因为 A 截面处 $Q=0$, M 有极值, 即为抛物线顶点。

CB 段只要定二个控制截面值。因 C 截面作用有集中力偶, 故 M 图有突变。

$$M_{C_{\text{右}}} = M_{C_{\Sigma}} + 8 = 4 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

$$M_{B_{\Sigma}} = M_{C_{\text{右}}} + \int_{C_{\text{右}}}^{B_{\Sigma}} Q dx = 4 + C_{\text{右}} B_{\Sigma} \text{ 段 } Q \text{ 图面积} = 4 + (-4 \times 2) = -4 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

5.5.2 弯曲应力

1. 弯曲正应力和正应力强度条件

(1) 纯弯曲

梁的横截面上只有弯矩而无剪力时的弯曲, 称为纯弯曲。

(2) 中性层与中性轴

① 中性层: 杆件弯曲变形时既不伸长也不缩短的一层。

② 中性轴: 中性层与横截面的交线, 即横截面上正应力为零的各点的连线。

③中性轴位置:当杆件发生平面弯曲,且处于线弹性范围时,中性轴通过横截面形心,且垂直于荷载作用平面。

④中性层的曲率:杆件发生平面弯曲时,中性层(或杆轴)的曲率与弯矩间的关系为

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M}{EI_z} \quad (5.5-6)$$

式中: ρ 为变形后中性层(或杆轴)的曲率半径; EI_z 为杆的抗弯刚度,轴 z 为横截面的中性轴。

(3)平面弯曲杆件横截面上的正应力

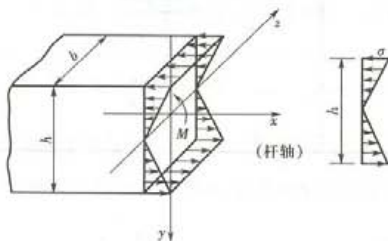


图 5.5-6

①分布规律:正应力的大小与该点至中性轴的垂直距离成正比,中性轴一侧为拉力,另一侧为压力,如图 5.5-6。

②计算公式:

$$\text{任一点应力 } \sigma = \frac{M}{I_z} y \quad (5.5-7)$$

$$\text{最大应力 } \sigma_{\max} = \frac{M}{I_z} y_{\max} = \frac{M}{W_z} \quad (5.5-8)$$

式中: M 为所求截面的弯矩; I_z 为截面对中性轴的惯性矩; W_z 为抗弯截面系数。

$W_z = \frac{I_z}{y_{\max}}$,它是一个只与横截面的形状和尺寸有关的几何量。对于矩形截面(见图 5.5-7

(a)):

$$I_z = \frac{bh^3}{12}, y_{\max} = \frac{h}{2}, W_z = \frac{bh^2}{6}$$

对于圆形截面(见图 5.5-7(b)):

$$I_z = \frac{\pi d^4}{64}, y_{\max} = \frac{d}{2}, W_z = \frac{\pi d^3}{32}$$

讨论:

①公式适用于线弹性范围且材料在拉伸和压缩时弹性模量相等的情况。

②在纯弯曲时,横截面在弯曲变形后保持平面,公式为精确解;横力弯曲时,由于剪应力的存在,横截面发生翘曲,但精确研究指出,工程实际中的梁,只要跨度与截面高度之比 $L/h > 5$,纯弯曲时的正应力公式仍适用。

(4)梁的正应力强度条件

强度条件:梁的最大工作正应力不得超过材料的许用正应力,即

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W_z} \leq [\sigma] \quad (5.5-9)$$

注意,当梁内 $\sigma_{t,\max} \neq \sigma_{c,\max}$,且材料的 $[\sigma_t] \neq [\sigma_c]$ 时,梁的拉伸与压缩强度均应得到满足。

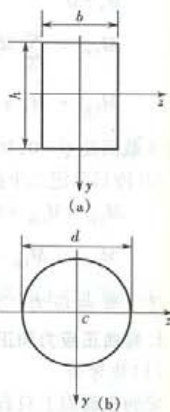


图 5.5-7

2. 弯曲剪应力和剪应力强度条件

(1) 矩形截面梁的剪应力

两个假设:①剪应力方向与截面的侧边平行;②沿截面宽度剪应力均匀分布(见图 5.5-8)。

①计算公式

$$\tau = \frac{QS_y^*}{bl_z} \quad (5.5-10)$$

式中: Q 为横截面上的剪力; b 为横截面的宽度; I_z 为整个横截面对中性轴的惯性矩; S_y^* 为横截面上距中性轴为 y 处横线一侧的部分截面对中性轴的静矩。

②最大剪应力:发生在中性轴处

$$\tau_{\max} = \frac{3Q}{2bh} = \frac{3Q}{2A} \quad (5.5-11)$$

(2) 其他常用截面图形的最大剪应力

$$\text{工字形截面} \quad \tau_{\max} = \frac{QS_{\max}^*}{I_z d} \quad (5.5-12)$$

式中: d 为腹板厚度; I_z/S_{\max}^* 可查型钢表。

$$\text{圆形截面} \quad \tau_{\max} = \frac{4Q}{3A} \quad (5.5-13)$$

$$\text{环形截面} \quad \tau_{\max} = 2 \frac{Q}{A} \quad (5.5-14)$$

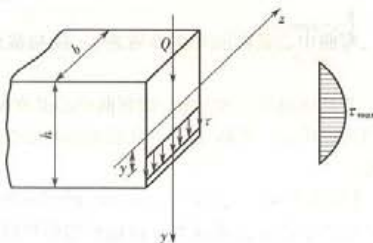


图 5.5-8

最大剪应力均发生在中性轴上。

(3) 剪应力强度条件

梁的最大工作剪应力不得超过材料的许用剪应力,即

$$\tau_{\max} = \frac{Q_{\max} \cdot S_{\max}^*}{bl_z} \leq [\tau] \quad (5.5-15)$$

式中: Q_{\max} 为全梁的最大剪力; S_{\max}^* 为中性轴一边的横截面面积对中性轴的静矩; b 为横截面在中性轴处的宽度; I_z 为整个横截面对中性轴的惯性矩。

3. 梁的合理截面

梁的强度通常是由横截面上的正应力控制的。由弯曲正应力强度条件 $\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W_z} \leq [\sigma]$,

可知,在截面积 A 一定的条件下,截面图形的抗弯截面系数愈大,梁的承载能力就愈大,故截面就愈合理。因此就 W_z/A 而言,对工字形、矩形和圆形三种形状的截面,工字形最为合理,矩形次之,圆形最差。此外对于 $[\sigma_t] = [\sigma_c]$ 的脆性材料,一般采用对称于中性轴的截面,使截面上、下边缘的最大拉应力和最大压应力同时达到许用应力。对于 $[\sigma_t] \neq [\sigma_c]$ 的脆性材料,一般采用不对称于中性轴的截面如T形、槽形等,使最大拉应力 $\sigma_{t,\max}$ 和最大压应力 $\sigma_{c,\max}$ 同时达到 $[\sigma_t]$ 和 $[\sigma_c]$,如图 5.5-9 所示。

4. 弯曲中心的概念

在横向力作用下,梁分别在两个形心主惯性平面 xy 和 xz 内弯曲时,横截面上剪力 Q 和 Q' 作用线的交点,称为截面的弯曲中心,也称为剪切中心。

当梁上的横向力不通过截面的弯曲中心时,梁除了发生弯曲变形外还要发生扭转变形。

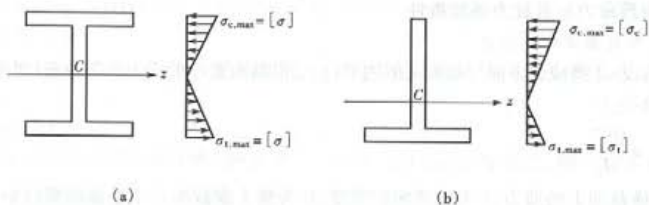


图 5.5-9

弯曲中心是截面几何性质之一,仅与截面的几何形状有关,而与荷载大小和材料性质无关。

若截面具有一对称轴,则弯曲中心必在截面的对称轴上。若截面具有两个对称轴,其交点即为弯曲中心。T形、L形等狭长矩形组成的截面,两个狭长矩形中线的交点即为截面的弯曲中心。

【例 5.5-4】把直径 $d=1\text{ mm}$ 的钢丝绕在直径 $D=2\text{ m}$ 的卷筒上,如图 5.5-10 所示,试求钢丝中产生的最大正应力。设钢丝的弹性模量 $E=2\times 10^5\text{ MPa}$ 。



图 5.5-10

解:由曲率与弯矩间的关系

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M}{EI_z}$$

$$\text{则 } M = \frac{EI_z}{\rho}$$

所以钢丝中的最大正应力

$$\sigma_{\max} = \frac{M}{W_z} = \frac{EI_z}{\rho W_z} = \frac{Ey_{\max}}{\rho} = \frac{E \frac{d}{2}}{\frac{D}{2}} = \frac{2 \times 10^{11} \times 1 \times 10^{-3}}{2} = 100\text{ MPa}$$

【例 5.5-5】图 5.5-11 所示两梁材料相同,当两梁各对应截面转角相等时,试问两梁横截面上最大正应力之比为多少?

解:由对应截面的转角相等,即 $\theta_1 = \theta_2$ 得

$$\frac{1}{\rho_1} = \frac{1}{\rho_2}$$

$$\text{即 } \frac{M_1}{EI_{z_1}} = \frac{M_2}{EI_{z_2}}$$

$$\text{则得 } \frac{M_1}{M_2} = \frac{I_{z_1}}{I_{z_2}} = \frac{\frac{bh^3}{12}}{\frac{b(2h)^3}{12}} = \frac{1}{8}$$

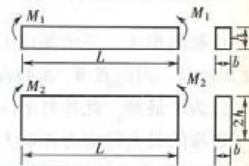


图 5.5-11

所以两梁的最大正应力之比为

$$\frac{\sigma_{1\max}}{\sigma_{2\max}} = \frac{M_1}{M_2} = \frac{W_{z1}}{W_{z2}} = \frac{M_1}{M_2} \times \frac{W_{z2}}{W_{z1}} = \frac{1}{8} \times \frac{b(2h)^2}{bh^2} = \frac{1}{2}$$

【例 5.5-6】起吊一根 50b 工字钢,如图 5.5-12 所示。已知工字钢长度 $L=19\text{ m}$,单位长度重量 $q=0.99\text{ kN/m}$,材料的许用应力 $[\sigma]=80\text{ MPa}$ 。试求吊索的合理位置,并校核起吊时工字钢的强度。

解:计算简图如图所示,画出弯矩图。

吊索的合理起吊位置应使梁中最大正弯矩和最大负弯矩的绝对值相等,即

$$|M_A| = M_C$$

因跨中点 C 的弯矩

$$M_C = \frac{qL}{2} \left(\frac{L}{2} - a \right) - \frac{1}{2} q \left(\frac{L}{2} \right)^2$$

$$M_A = M_B = \frac{qa^2}{2}$$

$$\frac{qL}{2} \left(\frac{L}{2} - a \right) - \frac{1}{8} qL^2 = \frac{qa^2}{2}$$

$$\text{解得 } a = 0.207L = 3.933\text{ m}$$

最大弯矩为

$$\begin{aligned} M_{\max} &= \frac{qa^2}{2} = \frac{1}{2} \times 0.99 \times (3.933)^2 \\ &= 7.66\text{ kN} \cdot \text{m} \end{aligned}$$

根据型钢截面特性表查得 50b 的 $W_z = 146\text{ cm}^3$,工字钢中的最大正应力

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W_z} = \frac{7.66 \times 10^3}{146 \times 10^{-6}} = 52.4\text{ MPa} < [\sigma]$$

故满足强度要求。

【例 5.5-7】倒 T 形截面的铸铁悬臂梁及其承载情况如图 5.5-13 所示。材料的许用拉应力 $[\sigma_t] = 40\text{ MPa}$,许用压应力 $[\sigma_c] = 80\text{ MPa}$ 。试求梁的许可荷载 $[P]$ 。

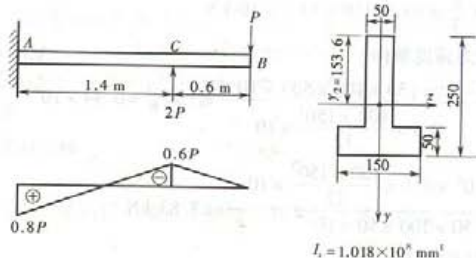


图 5.5-13

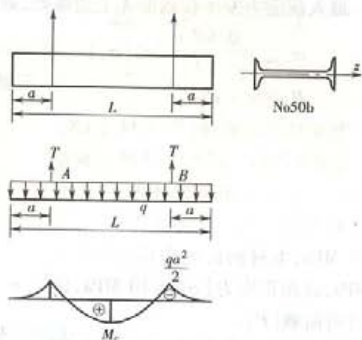


图 5.5-12

解:作梁的弯矩图如图所示。由强度条件

$$\sigma_{\max} = \frac{My_{\max}}{I_z} \leq [\sigma]$$

最大拉应力发生在截面 C 上边缘处,则

$$\sigma_{t,\max} = \frac{0.6P \times y_2}{I_z} \leq [\sigma_t]$$

得 $P \leq 44.2 \text{ kN}$

最大压应力发生在截面 A 上边缘处,则

$$\sigma_{c,\max} = \frac{0.8P \times y_2}{I_z} \leq [\sigma_c]$$

得 $P \leq 66.3 \text{ kN}$

故梁的许可荷载 $[P] = 44.2 \text{ kN}$ 。

【例 5.5-8】图 5.5-14 所示悬臂梁,由三块尺寸相同的木板胶合而成。胶合面上的许用剪应力 $[\tau]_{\text{胶}} = 0.34 \text{ MPa}$,木材的许用剪应力 $[\tau] = 1 \text{ MPa}$,许用正应力 $[\sigma] = 10 \text{ MPa}$,试求许可荷载 $[P]$ 。

解:作梁的剪力图、弯矩图如图 (b)、(c) 所示。

由梁的正应力强度条件

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W_z} = \frac{P}{\frac{bh^2}{6}} \leq [\sigma]$$

得 $P \leq 10 \times 10^6 \times \frac{100 \times 150^2}{6} \times 10^{-9} = 3.75 \text{ kN}$

由梁的剪应力强度条件

$$\tau_{\max} = \frac{3P}{2bh} \leq [\tau]$$

得 $P \leq 1 \times 10^6 \times \frac{2}{3} \times 100 \times 150 \times 10^{-6} = 10 \text{ kN}$

由胶合处的剪应力强度条件

$$\tau_{\text{胶}} = \frac{Q \cdot S_z^*}{bI_z} = \frac{P \times (50 \times 100 \times 50) \times 10^{-9}}{0.1 \times \frac{100 \times 150^3}{12} \times 10^{-12}} \leq [\tau]_{\text{胶}} = 0.34 \times 10^6$$

得 $P \leq \frac{0.34 \times 10^6 \times 0.1 \times \frac{100 \times 150^3}{12} \times 10^{-12}}{50 \times 100 \times 50 \times 10^{-9}} = 3.83 \text{ kN}$

故梁的许可荷载 $[P] = 3.75 \text{ kN}$ 。

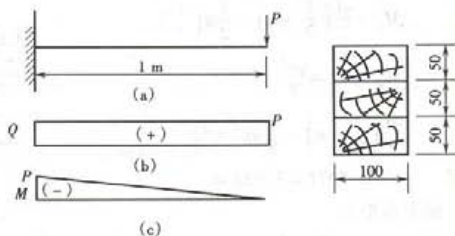


图 5.5-14

5.5.3 弯曲变形

1. 梁的挠度与转角

(1) 挠曲线

在外力作用下,梁的轴线由直线变为光滑的弹性曲线,梁弯曲后的轴线称为挠曲线。

在平面弯曲下,挠曲线为梁形心主惯性平面内的一条平面曲线 $v=f(x)$ (见图 5.5-15)。

(2) 挠度与转角

梁弯曲变形后,梁的每一个横截面都要产生位移,它包括三部分。

①挠度:梁横截面形心在垂直于轴线方向的线位移,称为挠度,记作 v 。沿梁轴各横截面挠度的变化规律,即梁的挠曲线方程为

$$v=f(x)$$

②转角:横截面相对原来位置绕中性轴所转过的角度,称为转角,记作 θ 。小变形情况下,

$$\theta \approx \tan \theta = \frac{dv}{dx} = v'$$

③其他:横截面形心沿梁轴线方向的位移,小变形条件下可忽略不计。

(3) 挠曲线近似微分方程

在线弹性范围、小变形条件下,挠曲线近似微分方程为

$$\frac{d^2v}{dx^2} = -\frac{M(x)}{EI_z} \quad (5.5-16)$$

上式是在图 5.5-15 所示坐标系下建立的。挠度 v 向下为正,转角 θ 顺时针转为正。

2. 积分法计算梁的位移

根据挠曲线近似微分方程 5.5-16,积分两次,即得梁的转角方程和挠度方程,即由

$$\frac{d^2v}{dx^2} = -\frac{M(x)}{EI_z}$$

$$\theta = \frac{dv}{dx} = -\int \frac{M(x)}{EI_z} dx + C$$

$$v = -\iint \frac{M(x)}{EI_z} dx dx + Cx + D$$

式中积分常数 C 、 D 可由梁的边界条件确定。当梁的弯矩方程需分段列出时,挠曲线微分方程也需分段建立,分段积分。于是全梁的积分常数数目将为分段数目的两倍。为了确定全部积分常数,除利用边界条件外,还需利用分段处挠曲线的连续条件(在分界点处左、右两段梁的转角和挠度均应相等)。

3. 用叠加法求梁的位移

(1) 叠加原理

几个荷载同时作用下梁的任一截面的挠度或转角等于各个荷载单独作用下同一截面挠度或转角的总和。

(2) 叠加原理的适用条件

叠加原理仅适用于线性函数。要求挠度、转角为梁上荷载的线性函数,必须满足:

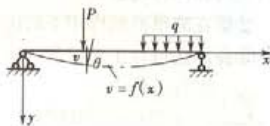


图 5.5-15

①材料为线弹性材料。

②梁的变形为小变形。

③结构几何线性。

(3) 叠加法的特征

①各荷载同时作用下挠度、转角等于单独作用下挠度、转角的总和,应该是几何和,同一方向的几何和即为代数和。

②梁在简单荷载作用下的挠度、转角应为已知或可查手册。

③叠加法适宜于求梁某一指定截面的挠度和转角。

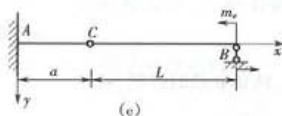
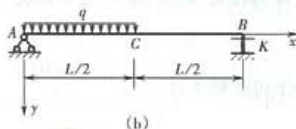
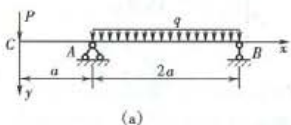


图 5.5-16

③挠曲线方程应分为两段,共有四个积分常数。

边界条件为 $x_1 = 0, v_A = 0, \theta_A = 0$

$$x_2 = a + L, v_B = 0$$

连续条件为 $x_1 = x_2 = a, v_{c1} = v_{c2} = v_C$

分析与讨论:

①凡荷载有突变处、有中间支承处、截面有变化处或材料有变化处,均应作为分段点。

②中间铰视为两个梁段间的联系,此种联系体现为两部分之间的相互作用力,故应作为分段点。

③各分段点处都应列出连续条件。根据梁变形的连续性,对同一截面只可能有唯一确定的挠度和转角值。在中间铰处,虽然两侧转角不同,但挠度却是唯一的。

【例 5.5-10】 试用叠加法求图 5.5-17 所示外伸梁外伸端 C 点的挠度 v_C 和转角 θ_C 。

解:将荷载分解为图 5.5-17(b)、(c)、(d) 三种情况,每种情况下的转角、挠度可查表得到

$$\theta'_C = \theta_B = -\frac{qa \times L^2}{16 \times 2EI} = -\frac{qa^3}{8EI}$$

$$v'_C = \theta_B \times a = -\frac{qa^4}{8EI}$$

【例 5.5-9】 用积分法求图 5.5-16 所示各梁的挠曲线方程时,试问应分为几段? 将出现几个积分常数? 并写出各梁的边界条件和连续条件。

解:①挠曲线方程应分为两段,共有四个积分常数。

边界条件为 $x_1 = a, v_A = 0$

$$x_2 = 3a, v_B = 0$$

连续条件为 $x_1 = x_2 = a, \theta_{A1} = \theta_{A2} = \theta_A, v_{A1} = v_{A2} = v_A$

②挠曲线方程应分为两段,共有四个积分常数。

边界条件为 $x_1 = 0, v_A = 0$

$$x_2 = L, v_B = \frac{R_B}{K} = \frac{qL}{8K}$$

式中 K 为弹簧的刚度。

连续条件为 $x_1 = x_2 = \frac{L}{2}, \theta_{c1} = \theta_{c2} = \theta_C$

$$v_{c1} = v_{c2} = v_C$$

$$\theta'_C = \frac{qa^3}{6EI}, v''_C = \frac{qa^4}{8EI}$$

$$\theta''_C = \theta'_R = \frac{\frac{qa^2}{2} \times L}{3 \times 2EI} = \frac{qa^3}{6EI}$$

$$v'''_C = \theta'_R \times a = \frac{qa^4}{6EI}$$

由叠加原理,得

$$\theta_C = \theta'_C + \theta''_C + \theta'''_C = -\frac{qa^3}{8EI} + \frac{qa^3}{6EI} + \frac{qa^3}{6EI} = \frac{5qa^3}{24EI} (\curvearrowright)$$

$$v_C = v'_C + v''_C + v'''_C = -\frac{qa^4}{8EI} + \frac{qa^4}{8EI} + \frac{qa^4}{6EI} = \frac{qa^4}{6EI} (\downarrow)$$

5.6 应力状态分析和强度理论

要求:

(一) 应力状态分析

① 了解一点处的应力状态、主平面和主应力的概念。

② 掌握平面应力状态分析的解析法和应力圆法。

解析法: 要会用公式求斜截面上的正应力、剪应力及主应力大小和方向。

应力圆法: 要掌握应力圆的作法, 应力圆与单元体间的关系, 并用于求斜截面上应力、主应力大小和方向。

③ 了解一点应力状态的最大正应力、最大剪应力及其所在面位置。

④ 了解各向同性材料的广义胡克定律。

(二) 强度理论

① 了解强度理论的概念, 熟悉材料的两种破坏形式。

② 掌握四个常用的强度理论的强度条件并熟悉其应用范围。

5.6.1 应力状态的概念

1. 一点的应力状态

通过受力构件内一点的所有截面上的应力情况称为一点的应力状态。

2. 一点的应力状态的表示法——单元体

围绕所研究的点, 截取一个边长为无穷小的正六面体, 用各面上的应力分量表示周围材料对其作用, 此正六面体称为应力单元体。其特点:

① 单元体的尺寸无限小, 每个面上的应力均匀分布;

② 单元体表示一点处的应力, 故相互平行截面上的应力相同。

3. 主平面、主应力、主单元体

① 主平面: 单元体中剪应力等于零的平面。

② 主应力: 主平面上的正应力。

可以证明: 受力构件内任一点, 均存在三个互相垂直的主平面。三个主应力用 σ_1 、 σ_2 和 σ_3 表示, 且按代数值得排列即 $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$ 。

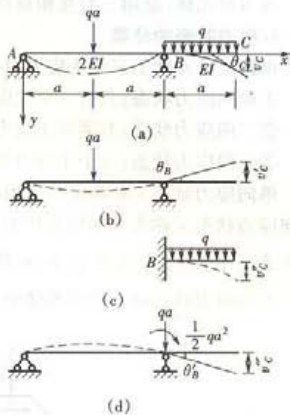


图 5.5-17

③主单元体:是用三对互相垂直的主平面取出的单元体。

4. 应力状态的分类

根据主单元体上三个主应力中有几个是非零的数值,可将应力状态分为三类。

①单向应力状态:只有一个主应力不等于零。

②二向应力状态:有两个主应力不等于零。

③三向应力状态:三个主应力都不等于零。

单向应力状态又称为简单应力状态,二向和三向应力状态统称为复杂应力状态。单向及二向应力状态又称为平面应力状态。

5.6.2 平面应力状态分析的解析法

平面应力状态通常用单元体中主应力为零的那个主平面的正投影表示,如图 5.6-1 所示。

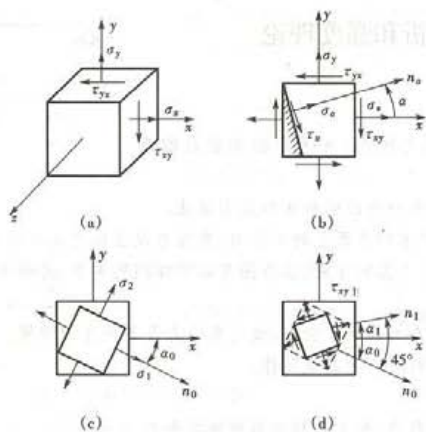


图 5.6-1

1. 任意斜截面上的应力

若已知一平面应力状态 $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$, 则与 x 轴成 α 角的斜截面上的应力分量

$$\sigma_\alpha = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\alpha - \tau_{xy} \sin 2\alpha \quad (5.6-1)$$

$$\tau_\alpha = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\alpha + \tau_{xy} \cos 2\alpha \quad (5.6-2)$$

式中:正应力 σ 以拉应力为正;剪应力 τ 以对单元体产生顺时针力矩者为正; α 角以逆时针转向为正。

2. 主平面 主应力

$$\text{主平面的方位角 } \alpha_0 \quad \tan 2\alpha_0 = \frac{-\tau_{xy}}{\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}} \quad (5.6-3)$$

$$\text{主应力 } \begin{cases} \sigma_{\max} \\ \sigma_{\min} \end{cases} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \quad (5.6-4)$$

考虑到单元体零应力面上的主应力为零,因此

若 $\sigma_{\max} > \sigma_{\min} > 0$, 则 $\sigma_1 = \sigma_{\max}, \sigma_2 = \sigma_{\min}, \sigma_3 = 0$

若 $\sigma_{\max} > 0, \sigma_{\min} < 0$, 则 $\sigma_1 = \sigma_{\max}, \sigma_2 = 0, \sigma_3 = \sigma_{\min}$

若 $\sigma_{\max} < 0, \sigma_{\min} < 0$, 则 $\sigma_1 = 0, \sigma_2 = \sigma_{\max}, \sigma_3 = \sigma_{\min}$

单元体中互相垂直的两个截面上的正应力之和为常量,即

$$\sigma_x + \sigma_y = \sigma_{\max} + \sigma_{\min} = \sigma_\alpha + \sigma_\beta \quad (5.6-5)$$

式中 $\beta = \alpha + 90^\circ$ 。

3. 主剪应力及其作用面

$$\text{作用面方位角 } \alpha_1 \quad \tan 2\alpha_1 = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2\tau_{xy}} \quad (5.6-6)$$

$$\text{数值 } \tau_{xy\pm} = \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \quad (5.6-7)$$

必须说明:

① 主剪应力 $\tau_{xy\pm}$ 是单元体上垂直于零应力面所有截面上剪应力的极大值和极小值,并不一定是该点的最大和最小剪应力。

② 主剪应力作用面(主剪面)与主平面成 45° 角,即

$$\alpha_1 = \alpha_0 \pm 45^\circ \quad (5.6-8)$$

5.6.3 平面应力状态分析的应力圆法

1. 应力圆方程

在平面应力状态 $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ 下,任意斜截面上的应力 σ_α 与 τ_α 间的关系式为一个圆方程:

$$\left(\sigma_\alpha - \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_\alpha^2 = \left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2$$

$$\text{圆心 } \left(\frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}, 0\right)$$

$$\text{圆半径 } R = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

2. 应力圆作法

如图 5.6-2 所示,若已知一平面应力状态 $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$, 则取横坐标为 σ 轴,纵坐标为 τ 轴,选定比例尺;由 (σ_x, τ_{xy}) 确定点 D_x ,由 (σ_y, τ_{yx}) 确定点 D_y ;连接 $D_x D_y$ 交 σ 轴于 C ,以 C 为圆

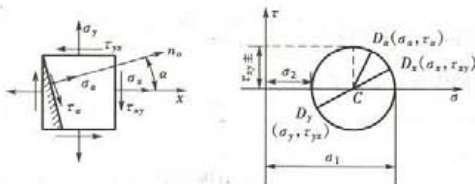


图 5.6-2

心, \overline{CD} 或 \overline{CD} 为半径作圆, 即得相应于该单元体的应力圆。

3. 应力圆与单元体之间的对应关系

应力圆与单元体之间的对应关系如下表所示。

应力圆	单元体
应力圆上某点的坐标	单元体某对应平面上的应力分量
应力圆上两点所夹的圆心角(2α)	单元体两对应平面间的夹角 α
应力圆与 σ 轴交点的坐标	单元体的主应力值
应力圆的半径	单元体的主剪应力值

以上对应关系可概括为“点对应, 转向相同, 夹角两倍”。

5.6.4 一点的最大正应力和最大剪应力

一点的最大正应力

$$\sigma_{\max} = \sigma_1 \quad (5.6-9)$$

一点的最大剪应力

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \quad (5.6-10)$$

其作用平面与 σ_2 方向平行且与 σ_1 、 σ_3 的作用面分别成 45° 。

5.6.5 广义胡克定律

对于各向同性材料, 在小变形条件下, 正应力仅引起线应变, 剪应力仅引起相应的剪应变, 所以应力—应变关系为

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{1}{E} [\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)], \gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G} \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{E} [\sigma_y - \nu(\sigma_x + \sigma_z)], \gamma_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{G} \\ \varepsilon_z &= \frac{1}{E} [\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)], \gamma_{zx} = \frac{\tau_{zx}}{G} \end{aligned} \right\} \quad (5.6-11)$$

三向主应力状态下, 主应力与主应变的关系为

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_1 &= \frac{1}{E} [\sigma_1 - \nu(\sigma_2 + \sigma_3)] \\ \varepsilon_2 &= \frac{1}{E} [\sigma_2 - \nu(\sigma_3 + \sigma_1)] \\ \varepsilon_3 &= \frac{1}{E} [\sigma_3 - \nu(\sigma_1 + \sigma_2)] \end{aligned} \right\} \quad (5.6-12)$$

平面应力状态下的应力—应变关系为



$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{1}{E}(\sigma_x - \nu\sigma_y) \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{E}(\sigma_y - \nu\sigma_x) \\ \varepsilon_z &= -\frac{\nu}{E}(\sigma_x + \sigma_y) \\ \gamma_{xy} &= \frac{1}{G}\tau_{xy} \end{aligned} \right\} \quad (5.6-13)$$

上列式中, E 为弹性模量, ν 为泊松比, G 为剪切弹性模量。

5.6.6 强度理论

1. 强度理论的概念

(1) 材料破坏的两种类型

材料破坏形式不仅与材料本身的材质有关, 而且与材料所处的应力状态、加载速度及温度环境等因素有关。材料在常温、静载荷下的破坏形式主要有以下两种。

- ①脆性断裂: 材料在无明显的变形下突然断裂。
- ②塑性屈服(流动): 材料出现显著的塑性变形而丧失其正常的工作能力。

(2) 强度理论

在复杂应力状态下关于材料破坏原因的假设, 称为强度理论。

研究强度理论的目的, 在于利用简单应力状态下的实验结果, 建立材料在复杂应力状态下的强度条件。

2. 四个常用的强度理论

四个常用强度理论的强度条件可以统一地写成

$$\sigma_r \leq [\sigma] \quad (5.6-14)$$

式中 σ_r 为相当应力, 其表达式为

$$\left. \begin{aligned} \text{最大拉应力理论(第一强度理论)} \quad \sigma_{r1} &= \sigma_1 \\ \text{最大拉应变理论(第二强度理论)} \quad \sigma_{r2} &= \sigma_1 - \nu(\sigma_2 + \sigma_3) \\ \text{最大剪应力理论(第三强度理论)} \quad \sigma_{r3} &= \sigma_1 - \sigma_3 \\ \text{形状改变比能理论(第四强度理论)} \\ \sigma_{r4} &= \sqrt{\frac{1}{2}[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]} \end{aligned} \right\} \quad (5.6-15)$$

$[\sigma]$ 为材料的许用应力。

对于工程上常见的一种二向应力状态如图 5.6-3 所示, 其特点是平面内某一方向的正应力为零。设 $\sigma_y = 0$, 则该点的主应力为

$$\sigma_1 = \frac{\sigma_x}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_x}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

代入式 5.6-15 得

第三强度理论(最大剪应力理论)的相当应力

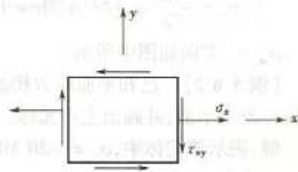


图 5.6-3

$$\sigma_{11} = \sqrt{\sigma_x^2 + 4\tau_{xy}^2} \quad (5.6-16)$$

第四强度理论(形状改变比能理论)的相当应力

$$\sigma_{14} = \sqrt{\sigma_x^2 + 3\tau_{xy}^2} \quad (5.6-17)$$

最大拉应力理论、最大拉应变理论是关于脆性断裂的强度理论;最大剪应力理论、形状改变比能理论是关于塑性屈服的强度理论。

3. 强度理论的选用

在三向拉应力作用下,材料均产生脆性断裂,故宜用第一强度理论;而在三向压缩应力状态下,材料均产生屈服破坏,故应采用第三或第四强度理论;当材料处于二向应力状态作用下时,脆性材料易发生断裂破坏,宜用第一或第二强度理论;塑性材料易发生塑性屈服破坏,宜用第三或第四强度理论。

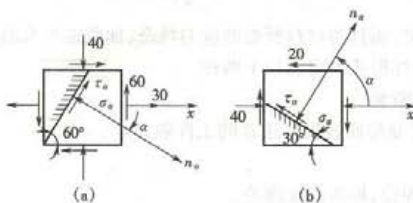


图 5.6-4

【例 5.6-1】 已知构件上某点的应力单元体如图 5.6-4(a)、(b) 所示(图中应力单位为 MPa)。试求指定斜截面上的应力。

解:图示单元体处于平面应力状态。

①在图示坐标中, $\sigma_x = 30$ MPa, $\sigma_y = -40$ MPa, $\tau_{xy} = -60$ MPa, $\alpha = -30^\circ$ 。代入式 5.6-1、式 5.6-2, 得

$$\begin{aligned} \sigma_\alpha &= \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\alpha - \tau_{xy} \sin 2\alpha \\ &= \frac{30 - 40}{2} + \frac{30 + 40}{2} \cos(-2 \times 30^\circ) - (-60) \sin(-2 \times 30^\circ) = -39.5 \text{ MPa} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tau_\alpha &= \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\alpha + \tau_{xy} \cos 2\alpha \\ &= \frac{30 + 40}{2} \sin(-2 \times 30^\circ) + (-60) \cos(-2 \times 30^\circ) = -60.3 \text{ MPa} \end{aligned}$$

σ_α 、 τ_α 方向如图中所示。

②在图示坐标中, $\sigma_x = -40$ MPa, $\sigma_y = 0$, $\tau_{xy} = 20$ MPa, $\alpha = 60^\circ$, 则

$$\sigma_\alpha = \frac{-40}{2} - \frac{40}{2} \cos 120^\circ - 20 \sin 120^\circ = -27.32 \text{ MPa}$$

$$\tau_\alpha = -\frac{40}{2} \sin 120^\circ + 20 \cos 120^\circ = -27.32 \text{ MPa}$$

σ_α 、 τ_α 方向如图中所示。

【例 5.6-2】 已知平面应力状态如图 5.6-5 所示(图中应力单位为 MPa)。试用解析法求主应力及主平面,并画出主单元体。

解:图示单元体中, $\sigma_x = -20$ MPa, $\sigma_y = 30$ MPa, $\tau_{xy} = -20$ MPa。

主应力

$$\begin{aligned} \sigma_{\max} &= \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} = \frac{-20 + 30}{2} + \sqrt{\left(\frac{-20 - 30}{2}\right)^2 + 20^2} = 37 \text{ MPa} \\ \sigma_{\min} &= \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} = \frac{-20 + 30}{2} - \sqrt{\left(\frac{-20 - 30}{2}\right)^2 + 20^2} = -20 \text{ MPa} \end{aligned}$$

所以 $\sigma_1 = \sigma_{\max} = 37 \text{ MPa}$, $\sigma_2 = 0$, $\sigma_3 = -20 \text{ MPa}$

主平面方位角

$$\begin{aligned}\tan 2\alpha_0 &= \frac{-2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} = \frac{-2(-20)}{-20 - 30} \\ &= \frac{+40}{-50} = -0.8\end{aligned}$$

因 $\tan 2\alpha_0$ 式中分子为正, 分母为负, 所以 $2\alpha_0$ 在第二象限取值, 即

$$2\alpha_{01} = 180^\circ - 38.66^\circ = 141.34^\circ$$

所以 $\alpha_{01} = 70.67^\circ$ 对应 σ_1 作用面, 则 $\alpha_{02} = \alpha_{01} - 90^\circ = -19.33^\circ$ 对应 σ_3 的作用面。

α_{01} 、 α_{02} 中何者对应主应力 σ_1 、 σ_3 , 亦可用如下定性判断法: 将单元体上剪应力箭头相对的角点连成直线, 则主应力 σ_1 必在代数值较大的正应力与该对角线之间。

【例 5.6-3】 试用应力圆法解上题。

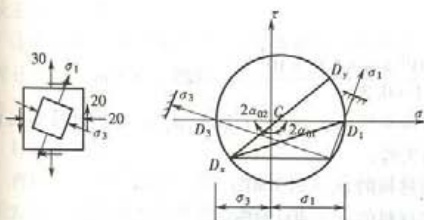


图 5.6-6

由 $\widehat{D_1 D_3}$ 弧所对圆心角即为 $2\alpha_{01}$, 由 $\widehat{D_x D_y}$ 弧所对圆心角即为 $2\alpha_{02}$ 。利用同一弧所对的圆周角为圆心角之半的原理, 可由几何法直接画出主应力单元体如图所示。

【例 5.6-4】 半径为 r 、壁厚为 t 的两端封闭的薄壁钢圆筒, 在内压力 p 作用下发生爆裂时的破坏形式如图 5.6-7 所示。试分析其破坏原因。

解: 薄壁圆筒表面一点的应力分量为

$$\sigma_1 = \frac{pr}{t} \quad (\text{周向})$$

$$\sigma_2 = \frac{pr}{2t} \quad (\text{轴向})$$

$$\sigma_3 = 0 \quad (\text{径向})$$

最大剪应力

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} = \frac{pr}{2t}$$

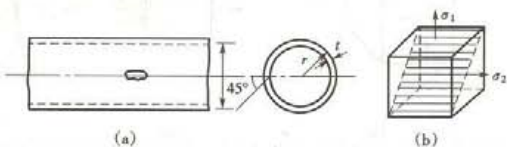


图 5.6-7

其作用面与 σ_2 平行并与 σ_1 、 σ_3 各成 45° 。按第三强度理论, 其破坏是由最大剪应力引起的剪切破坏, 故形成图示破裂面。

【例 5.6-5】 一直径 $d = 20 \text{ mm}$ 的钢质受扭圆轴, 钢的 $E = 2 \times 10^5 \text{ MPa}$, $\nu = 0.3$ 。现由应变仪测得圆轴表面上与母线成 45° 方向的线应变为 $\varepsilon = 5.2 \times 10^{-4}$, 如图 5.6-8 所示。试求圆轴

所承受的力偶矩 T 。

解: (1) 圆轴表面测点处的应力状态

圆轴表面上任一点的应力状态为纯剪应力状态, 其中

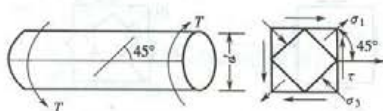


图 5.6-8

$$\tau = \frac{M_T}{W_t} = \frac{16T}{\pi d^3}$$

主应力

$$\sigma_1 = \tau, \text{方向与母线成 } 45^\circ$$

$$\sigma_2 = 0,$$

$$\sigma_3 = -\tau$$

(2) 圆轴承受的力偶矩

由广义胡克定律

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{E} [\sigma_1 - \nu(\sigma_2 + \sigma_3)] = \frac{1 + \nu}{E} \tau$$

所以
$$\varepsilon = \frac{1 + \nu}{E} \times \frac{16T}{\pi d^3}$$

得
$$T = \frac{\varepsilon E \pi d^3}{16(1 + \nu)} = \frac{5.2 \times 10^{-4} \times 2 \times 10^{11} \times \pi \times (20 \times 10^{-3})^3}{16(1 + 0.3)} = 125.7 \text{ N} \cdot \text{m}$$

【例 5.6-6】对给定的应力状态(图 5.6-9 所示), $\sigma_x = 87 \text{ MPa}$, $\sigma_y = -87 \text{ MPa}$, $\sigma_z = 160 \text{ MPa}$, $\tau_{xy} = 50 \text{ MPa}$ 。确定以下两种材料是否失效:

①对脆性材料用最大拉应力理论, 已知材料的 $\sigma_b = 210 \text{ MPa}$;

②对塑性材料用最大剪应力理论, 已知材料的 $\sigma_s = 400 \text{ MPa}$ 。

解: 这是一个三向应力状态的单元体, 其中已知一个主平面和一个主应力 ($\sigma_z = 160 \text{ MPa}$), 所以只要求出另两个 xy 平面内的主应力。为此, 把单元体沿垂直于 z 轴方向投影, 得到图示的平面应力状态的单元体。

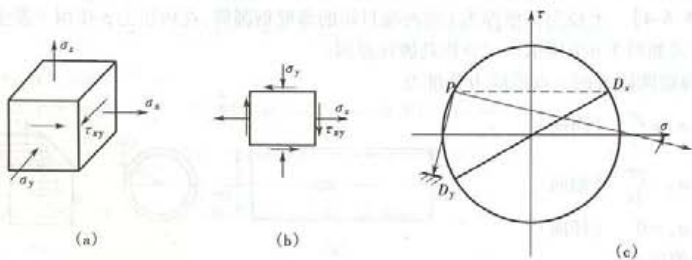


图 5.6-9

用应力图法求主应力, 量得 $\sigma_{\max} = -\sigma_{\min} = 100 \text{ MPa}$ 。

或用数解法按式 5.6-4 计算

$$\frac{\sigma_{\max}}{\sigma_{\min}} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} = 0 \pm \sqrt{\left(\frac{87 - (-87)}{2}\right)^2 + 50^2} = \pm 100.3 \text{ MPa}$$

因此, 给定点的三个主应力为

$$\sigma_1 = 160 \text{ MPa}, \sigma_2 = 100.3 \text{ MPa}, \sigma_3 = -100.3 \text{ MPa}$$

若材料为脆性材料,用第一强度理论

$$\sigma_{n1} = \sigma_1 = 160 \text{ MPa} < \sigma_b = 210 \text{ MPa}$$

所以材料不失效。

若材料为塑性材料,用第三强度理论

$$\sigma_{n3} = \sigma_1 - \sigma_3 = 160 - (-100.3) = 260.3 \text{ MPa} < \sigma_s$$

故材料不失效。

5.7 组合变形

要求:

- ①熟悉组合变形的一般分析方法;
- ②掌握斜弯曲的分析方法,掌握截面具有两根对称轴、四个角点时最大正应力的计算;
- ③掌握拉(压)—弯曲组合变形的分析方法,掌握截面具有两根对称轴、四个角点的杆的最大正应力计算;
- ④掌握弯—扭组合变形下,杆横截面上的应力计算,并会用相应的强度理论对危险点进行强度计算。

5.7.1 概述

1. 组合变形

杆件在外力作用下,同时产生两种或两种以上的同一数量级的基本变形,称为组合变形。

2. 组合变形强度计算的步骤

在小变形和材料服从胡克定律的前提下,可以认为组合变形中的每一种基本变形都是各自独立、互不影响的。因此对组合变形杆件进行强度计算,可以应用叠加原理,采用先分解而后叠加的方法。其基本步骤如下。

①将作用在杆件上的荷载进行简化与分解(横向力向截面的弯曲中心简化,并沿截面的形心主惯性轴方向分解;而纵向力则向截面形心简化),使简化后每一组荷载只产生一种基本变形。

②分别计算杆件在各个基本变形下的应力。

③将各基本变形情况下的应力叠加,便得在组合变形下杆件的总应力。

④根据危险点的应力状态,建立强度条件。

5.7.2 斜弯曲

1. 受力特征与变形特征

①受力特征:横向力(或力偶)的作用线(作用面)通过横截面的弯曲中心,但不平行于梁的形心主惯性平面。

②变形特征:弯曲平面与荷载作用平面不平行。

2. 应力计算

如图 5.7-1 所示,任意横截面上任意点 (y, z) 的应力

$$\sigma = \frac{M_x y}{I_x} + \frac{M_y z}{I_y} \quad (5.7-1)$$

3. 中性轴位置

由 $\sigma = 0$ 条件确定

$$\tan \alpha = \frac{y_0}{z_0} = -\frac{M_x}{M_y} \times \frac{I_x}{I_y} = -\frac{I_x}{I_y} \tan \varphi \quad (5.7-2)$$

式中 φ 为外力作用线与 y 轴的夹角。

一般情况下,梁横截面的两个形心主惯矩并不相等,即 $I_x \neq I_y$ 。故 α 与 φ 不等,即中性轴与合弯矩矢量方向不平行(即中性轴不垂直荷载作用面),这是斜弯曲区别于平面弯曲的特点之一。

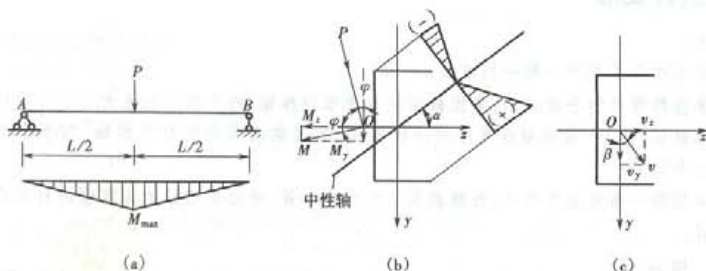


图 5.7-1

4. 强度条件

距中性轴最远的点是危险点。若截面具有棱角,则棱角点是危险点;无棱角的截面,应先确定中性轴的位置,再找到最远点(截面周边上平行中性轴的切点处)。危险点处于单向应力状态。

设危险点的坐标为 (y_1, z_1) , 则强度条件为

$$\sigma_{\max} = M_{\max} \left(\frac{\cos \varphi \cdot y_1}{I_x} + \frac{\sin \varphi \cdot z_1}{I_y} \right) \leq [\sigma] \quad (5.7-3)$$

或
$$\sigma_{\max} = \frac{M_{x\max}}{W_x} + \frac{M_{y\max}}{W_y} \leq [\sigma] \quad (5.7-4)$$

M_x 、 M_y 不在同一截面达到最大值时,应试算 M_x 、 M_y 较大的几个截面,才能确定危险截面。若材料的许用拉、压应力不同,即 $[\sigma_t] \neq [\sigma_c]$, 则拉、压强度均应满足。

5. 变形计算

先分别求出 P_y 、 P_z 产生的挠度 v_y 、 v_z , 然后几何合成,得

$$v = \sqrt{v_y^2 + v_z^2} \quad (5.7-5)$$

总挠度 v 与 y 轴的夹角为

$$\tan \beta = \frac{v_z}{v_y} = \tan \varphi \times \frac{I_x}{I_y} \quad (5.7-6)$$

一般情况下, $I_x \neq I_y$, 故 $\beta \neq \varphi$ 。所以弯曲平面不平行荷载作用面。但 $\beta = |\alpha|$, 中性轴垂直弯曲平面。

5.7.3 拉伸或压缩与弯曲的组合变形

1. 轴向力与横向力联合作用

图 5.7-2 所示 AB 梁同时受轴向拉力 P 及横向分布荷载 q 作用。

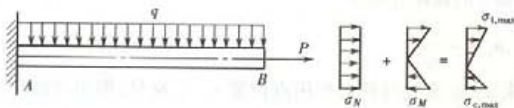


图 5.7-2

任一横截面上的内力中,由轴向力引起轴力 N ,由横向力引起弯矩 M_x 、剪力 Q_y 。横截面上任一点的正应力

$$\sigma = \frac{N}{A} + \frac{M_x \cdot y}{I_x} \quad (5.7-7)$$

设 A 截面为危险截面,上边缘点为危险点,处于单向应力状态,故强度条件为

$$\sigma_{\max} = \frac{N}{A} + \frac{M_{\max}}{W_x} < [\sigma] \quad (5.7-8)$$

对于脆性材料,则应分别校核其抗拉和抗压强度。对于塑性材料取 $\sigma_{1,\max}$ 、 $\sigma_{c,\max}$ 中绝对值最大者校核强度。

2. 偏心压缩(或拉伸)

图 5.7-3 所示杆件受偏心压力(或拉力)作用时,它也是拉伸(压缩)与弯曲的组合。将偏心力 P 向顶面形心 O 点简化,得到轴压力 P 和作用在 xy 平面内的力偶 $M_x = P y_p$ 和作用在 xz 平面内的力偶 $M_y = P z_p$ 。将同时产生轴向压缩(拉伸)和两个平面内的平面弯曲两种基本变形。

(1) 任一截面上的内力分量

轴力 $N = -P$

弯矩 $M_y = P \times z_p$, $M_x = P \times y_p$

(2) 应力计算

任一点 $K(y, z)$ 的应力为

$$\begin{aligned} \sigma &= -\frac{P}{A} - \frac{P z_p \cdot z}{I_y} - \frac{P y_p \cdot y}{I_x} \\ &= -\frac{P}{A} \left(1 + \frac{z_p}{i_y^2} z + \frac{y_p}{i_x^2} y \right) \end{aligned} \quad (5.7-9)$$

式中 $i_x = \sqrt{\frac{I_x}{A}}$; $i_y = \sqrt{\frac{I_y}{A}}$ 。

偏心拉伸时, P 用负值代入即可。

(3) 中性轴位置

横截面中心轴位置由 $\sigma = 0$ 确定,中性轴为一条不通过截面形心的直线。

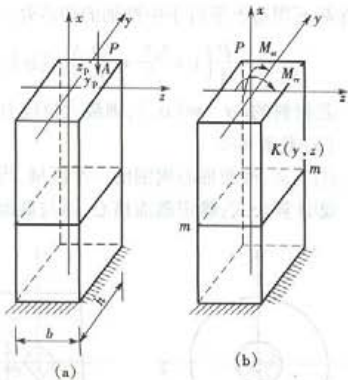


图 5.7-3

$$1 + \frac{y_p \cdot y_0}{i_x^2} + \frac{z_p \cdot z_0}{i_y^2} = 0 \quad (5.7-10)$$

式中 (z_0, y_0) 为中性轴上任一点的坐标。

中性轴在 y, z 轴上的截距分别为

$$a_y = -\frac{i_x^2}{y_p}, a_z = -\frac{i_y^2}{z_p} \quad (5.7-11)$$

式中负号表明,截距 a_y, a_z 分别与外力作用点位置 y_p, z_p 反号,即中性轴与外力作用点分别处于形心的两侧。

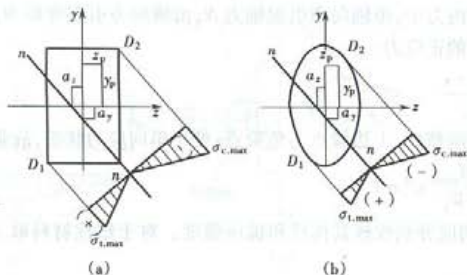


图 5.7-4

(4) 强度条件

危险点位于距中性轴最远的点处。若截面有棱角,则危险点必在棱角处;若截面无棱角,则在截面周边上平行于中性轴的切点处。危险点的应力状态为单向应力状态,其强度条件为

$$\sigma_{\max} = \frac{P}{A} \left(1 + \frac{z_p z_1}{i_x^2} + \frac{y_p y_1}{i_y^2} \right) \leq [\sigma] \quad (5.7-12)$$

若材料的 $[\sigma_t] \neq [\sigma_c]$,则最大拉应力点与最大压应力点均需校核。

(5) 截面核心

- ①定义:截面形心周围的一个区域,当偏心荷载作用于该区域时,截面上只出现一种应力。
- ②计算公式:确定截面核心,由与截面周边相切的中性轴截距,求外力作用点的位置,即

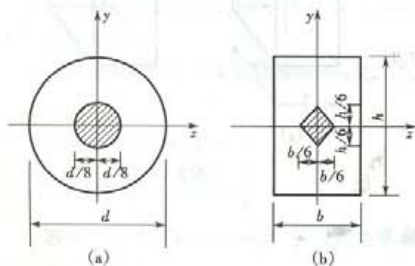


图 5.7-5

$$\left. \begin{aligned} y_p &= -\frac{i_x^2}{a_y} \\ z_p &= -\frac{i_y^2}{a_z} \end{aligned} \right\} \quad (5.7-13)$$

5.7.4 扭转和弯曲的组合

当构件同时承受扭转力偶和横向力作用时,将产生扭转和弯曲两种基本变形。

1. 应力计算

若某一截面上内力分量有扭矩 M_T 以及相互垂直平面内的弯矩 M_y 和 M_z ,剪力

Q, Q_z 通常略去不计, 则该截面上任一点 (y, z) 处的应力分量有扭转剪应力 τ 及弯曲正应力 σ 。若构件的横截面为圆形或空心圆截面, 由于过圆形或空心圆截面形心的任一轴均为形心主惯性轴, 故可先计算合成弯矩

$$M_h = \sqrt{M_y^2 + M_z^2} \quad (5.7-14)$$

然后, 再按平面弯曲, 计算正应力, 则有

$$\tau = \frac{M_T \cdot \rho}{I_p}, \sigma = \frac{M_h \cdot y}{I_z}$$

2. 强度条件

(1) 危险点及其应力状态

危险点位于合成弯矩作用平面与横截面相交的截面周边处。其应力状态为平面应力状态。

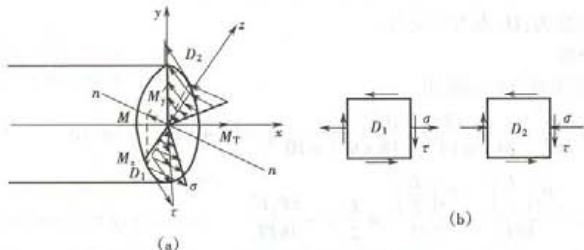


图 5.7-6

(2) 强度条件

对于塑性材料, 选用第三或第四强度理论, 其强度条件分别为

$$\sigma_{\text{ts}} = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} = \frac{\sqrt{M_h^2 + 4M_T^2}}{W} \leq [\sigma] \quad (5.7-15)$$

$$\sigma_{\text{ts}} = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2} = \frac{\sqrt{M_h^2 + 0.75M_T^2}}{W} \leq [\sigma] \quad (5.7-16)$$

式中: $\sigma = \frac{M_h}{W}$; $\tau = \frac{M_T}{W_t}$ 。

抗弯截面系数 $W = \frac{\pi d^3}{32}$

抗扭截面系数 $W_t = \frac{\pi d^3}{16}$

【例 5.7-1】 截面为矩形 $b \times h = 90 \text{ mm} \times 180 \text{ mm}$ 的悬臂木梁, 承受荷载 $P_1 = 1 \text{ kN}$, $P_2 = 1.6 \text{ kN}$, 如图 5.7-7 所示, 木材的 $E = 1 \times 10^4 \text{ MPa}$ 。试求: (1) 梁内最大正应力及其作用点位置; (2) 梁的最大挠度。

解: (1) 最大正应力

危险截面在固定端处, 其弯矩为

$$M_y = 2 \times P_1 = 2 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

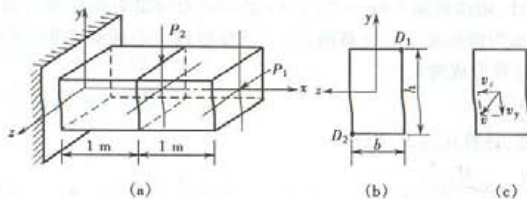


图 5.7-7

$$M_z = 1 \times P_2 = 1.6 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

危险点为固定端截面上的 D_1 点和 D_2 点, 其正应力

$$\sigma_{\max} = \frac{M_y}{W_y} + \frac{M_z}{W_z} = \frac{6M_y}{hb^2} + \frac{6M_z}{bh^2} = \frac{6(2 \times 10^3)}{(18 \times 9^2) \times 10^{-6}} + \frac{6(1.6 \times 10^3)}{(9 \times 18^2) \times 10^{-6}} = 11.52 \text{ MPa}$$

其中: D_1 点为拉应力; D_2 点为压应力。

(2) 最大挠度

最大挠度发生在自由端截面

$$v_z = \frac{P_1 L^2}{3EI_z} = \frac{12(1 \times 10^3)(2^3)}{3(1 \times 10^{10})(18 \times 9^3) \times 10^{-8}} = 24.4 \text{ mm}$$

$$v_y = -\frac{P_2 \left(\frac{L}{2}\right)^3}{3EI_y} - \frac{P_2 \left(\frac{L}{2}\right)^2}{2EI_y} \times \frac{L}{2} = -\frac{5P_2 L^3}{48EI_y}$$

$$= -\frac{5 \times 12(1.6 \times 10^3)(2)^3}{48(1 \times 10^{10})(9 \times 18^3) \times 10^{-8}} = -3.05 \text{ mm}$$

$$v_{\max} = \sqrt{v_y^2 + v_z^2} = \sqrt{(-3.05)^2 + (24.4)^2} = 24.59 \text{ mm}$$

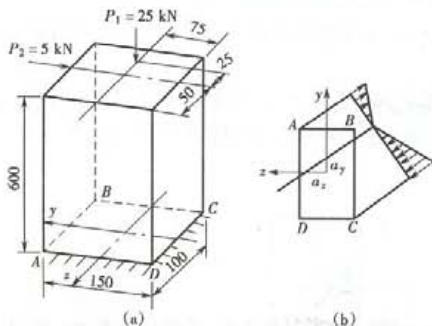


图 5.7-8

【例 5.7-2】矩形截面短柱承受荷载 P_1 、 P_2 作用, 如图 5.7-8 所示。试求固定端截面上角点 A、B、C 及 D 处的正应力, 并确定该截面中性轴的位置。

解: (1) 固定端截面的内力分量

$$N = P_1 = 25 \text{ kN}$$

$$M_y = P_1 \times 0.025$$

$$= 0.025(25 \times 10^3)$$

$$= 625 \text{ N} \cdot \text{m}$$

$$M_z = P_2 \times 0.6 = 0.6(5 \times 10^3)$$

$$= 3000 \text{ N} \cdot \text{m}$$

(2) 各点应力

$$\sigma_A = -\frac{N}{A} + \frac{M_y}{W_y} + \frac{M_z}{W_z}$$

$$= -\frac{25 \times 10^3}{0.1 \times 0.15} + \frac{6 \times 625}{0.15 \times 0.1^2} + \frac{6 \times 3000}{0.1 \times 0.15^2}$$

$$= (-1.67 + 2.5 + 8) \times 10^6 = 8.83 \text{ MPa}$$

$$\sigma_B = -\frac{N}{A} - \frac{M_y}{W_y} + \frac{M_z}{W_z} = (-1.67 - 2.5 + 8) \times 10^6 = 3.83 \text{ MPa}$$

$$\sigma_C = -\frac{N}{A} - \frac{M_y}{W_y} - \frac{M_z}{W_z} = (-1.67 - 2.5 - 8) \times 10^6 = -12.17 \text{ MPa}$$

$$\sigma_D = -\frac{N}{A} + \frac{M_y}{W_y} - \frac{M_z}{W_z} = (-1.67 + 2.5 - 8) \times 10^6 = -7.17 \text{ MPa}$$

(3) 中性轴位置。

设 (y_0, z_0) 为中性轴上任一点的坐标, 则有

$$\begin{aligned} \sigma_{y_0-z_0} &= -\frac{N}{A} + \frac{M_y \cdot z_0}{I_y} + \frac{M_z \cdot y_0}{I_z} = -1.67 \times 10^6 + \frac{625 \times 12}{0.15 \times 0.1^3} \times z_0 + \frac{3000 \times 12}{0.1 \times 0.15^3} \times y_0 \\ &= (-1.67 + 50z_0 + 106.7y_0) \times 10^6 = 0 \end{aligned}$$

得中性轴方程

$$29.94z_0 + 63.89y_0 - 1 = 0$$

中性轴与 y, z 轴的截距:

$$\text{令 } z_0 = 0, \text{ 则 } a_y = \frac{1}{63.89} = 15.7 \text{ mm}_0$$

$$\text{令 } y_0 = 0, \text{ 则 } a_z = \frac{1}{29.94} = 33.4 \text{ mm}_0$$

中性轴位置如图 5.7-8(b) 所示。

【例 5.7-3】 一等截面圆杆 AB , 杆的轴线为四分之一圆弧, 其曲率半径 $R = 600 \text{ mm}$, 杆的 B 端固定支承, 且使杆 AB 保持水平; A 端承受铅垂荷载 $P = 1.5 \text{ kN}$, 如图 5.7-9 所示。杆材料为钢, $[\sigma] = 80 \text{ MPa}$, $E = 2.1 \times 10^5 \text{ MPa}$, $\nu = 0.3$ 。试求: 圆杆的直径。

解: 取任一截面 (图 5.7-9(b)), 其内力分量

$$M = PR \sin \varphi$$

$$M_T = PR(1 - \cos \varphi)$$

显然, 危险截面为固定端 B 截面 ($\varphi = \frac{\pi}{2}$)

$$M_{\max} = PR, M_{T\max} = PR$$

由第三强度理论

$$\frac{\sqrt{M_{\max}^2 + M_{T\max}^2}}{W} \leq [\sigma]$$

所以圆杆直径

$$d \geq \sqrt[3]{\frac{32 \sqrt{(1500 \times 0.6)^2 + (1500 \times 0.6)^2}}{\pi (80 \times 10^6)}} = 54.5 \text{ mm}$$

5.8 压杆稳定

要求:

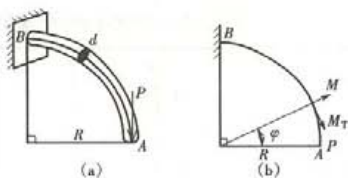


图 5.7-9

- ①了解压杆稳定的概念;
- ②掌握压杆柔度的计算,熟悉各种典型支承条件下的长度系数;
- ③掌握细长压杆临界力的欧拉公式及其适用范围;
- ④掌握不同柔度压杆临界力的计算及直线公式的适用条件;
- ⑤了解压杆折减系数的意义,熟悉压杆的稳定条件。

5.8.1 压杆稳定性的概念

1. 平衡形式的特征

①稳定平衡:杆在轴向压力作用下,当外加干扰撤除后若能恢复原有直线形状的平衡,则杆件原来直线形状的平衡是稳定平衡。

②不稳定平衡:杆在轴向压力作用下,当外加干扰撤除后若不能恢复原有直线形状,仍保持微弯状态的平衡,则杆件原来的直线形状的平衡是不稳定平衡。

2. 压杆的失稳与临界力

①失稳:压杆丧失其原有的直线形状的平衡而过渡为微弯状态的平衡的现象。

②临界力:压杆保持直线形状的平衡为稳定平衡时,轴压力的最大值,也即压杆在微弯状态下保持平衡的最小压力。





5.8.2 细长压杆的临界力公式

细长压杆临界力的欧拉公式为

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{(\mu L)^2} \quad (5.8-1)$$

式中: E 为材料的弹性模量; I 为压杆失稳而弯曲时,横截面对中性轴的惯性矩; L 为压杆长度; μ 为长度系数,与杆两端的约束条件有关,常见的各种支承方式的长度系数见下表。

表 5.8-1 长度系数

简图				
支承方式	两端铰支	一端自由,一端固定	两端固定	一端铰支,一端固定
长度系数	1	2	0.5	0.7

5.8.3 欧拉公式适用范围

1. 临界应力

在临界压力作用下,压杆横截面上的应力

$$\sigma_{cr} = \frac{P_{cr}}{A} = \frac{\pi^2 EI}{(\mu L)^2 A} = \frac{\pi^2 E i^2}{(\mu L)^2} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2} \quad (5.8-2)$$

式中: i 为截面的惯性半径, $i = \sqrt{\frac{I}{A}}$; λ 为柔度或长细比, $\lambda = \frac{\mu L}{i}$ 。

上式综合反映了杆端约束、杆的长度、截面形状和尺寸等因素对临界应力的影响, λ 是一个无量纲量。

压杆柔度越大, 临界应力就越小, 压杆就越容易失稳。若压杆在两个形心主惯性平面内的柔度不同, 则压杆总是在柔度较大的那个形心主惯性平面内失稳。

2. 欧拉公式的适用范围

欧拉公式是根据杆件弯曲变形的近似挠曲线微分方程式导出的, 仅适用于小变形、线弹性范围的压杆, 即临界应力 σ_{cr} 应小于材料的比例极限 σ_p , 即

$$\sigma_{cr} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2} \leq \sigma_p \quad (5.8-3)$$

用柔度表示

$$\lambda \geq \pi \sqrt{\frac{E}{\sigma_p}} = \lambda_p \quad (5.8-4)$$

λ_p 是压杆能够应用欧拉公式的最小柔度, 其值取决于压杆材料的弹性模量 E 和比例极限 σ_p 。例如, 对于 Q235 钢, $E = 2.06 \times 10^5 \text{ MPa}$, $\sigma_p = 200 \text{ MPa}$, 则

$$\lambda_p = \pi \sqrt{\frac{2.06 \times 10^{11}}{200 \times 10^6}} \approx 100$$

用 Q235 钢制成的压杆, 只有当 $\lambda \geq 100$ 时, 才可以使用欧拉公式。

5.8.4 经验公式和临界应力总图

1. 临界应力经验公式

根据压杆柔度 λ 的大小, 压杆可以分为三种类型, 分别按不同的公式来计算临界应力。

(1) 细长杆(大柔度杆), $\lambda \geq \lambda_p$

$$\sigma_{cr} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2}$$

(2) 中长杆(中柔度杆), $\lambda_p > \lambda \geq \lambda_0$

$$\text{直线型经验公式 } \sigma_{cr} = a - b\lambda \quad (5.8-5)$$

式中 a 、 b 为与材料有关的常数。

$$\lambda_0 = \frac{a - \sigma^0}{b} \begin{cases} \text{塑料材料} & \sigma^0 = \sigma_e \\ \text{脆性材料} & \sigma^0 = \sigma_b \end{cases} \quad (5.8-6)$$

(3) 粗短杆(小柔度杆), $\lambda \leq \lambda_0$

$$\sigma_{cr} = \sigma^0 \quad (5.8-7)$$

工程上还应用一种抛物线型经验公式

$$\sigma_{cr} = a_1 - b_1 \lambda^2, \lambda \leq \lambda_0 \quad (5.8-8)$$

式中 a_1 、 b_1 、 λ_0 为与材料有关的常数。

2. 临界应力总图

临界应力总图是表示压杆临界应力随不同柔度 λ 的变化规律的图线(图 5.8-1)。

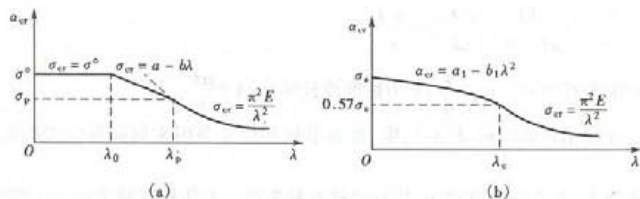


图 5.8-1

5.8.5 压杆的稳定校核

1. 安全系数法

稳定条件:压杆具有的工作安全系数 n 应不低于规定的稳定安全系数 n_{st} , 即

$$n = \frac{P_{cr}}{P} \geq n_{st} \quad (5.8-9)$$

式中: P_{cr} 为压杆的临界压力; P 为压杆承受的工作压力; n_{st} 为规定的稳定安全系数。

2. 折减系数法

稳定条件:压杆横截面上的应力不超过材料的许用应力乘以考虑稳定的折减系数, 即

$$\sigma = \frac{P}{A} \leq \varphi [\sigma] \quad (5.8-10)$$

式中 φ 为折减系数, 是小于 1 的一个系数, 它综合考虑了柔度 λ 对临界应力 σ_{cr} 、稳定安全系数 n_{st} 的影响, 所以 φ 也是 λ 的函数。常用材料的 φ 值可查阅工程手册。

5.8.6 提高压杆稳定性的措施

1. 减小压杆的柔度

- ① 选择合理的截面形状。
- ② 减小压杆的长度。
- ③ 改善杆端支承条件。

2. 合理选用材料

选用弹性模量 E 值较大的材料, 能提高细长压杆的临界应力。中长杆的临界应力与材料的强度有关, 强度越高的材料, 其临界应力也越高。

【例 5.8-1】 两端为球铰支承的等直压杆, 其横截面分别为图 5.8-2 所示。试问压杆失稳时, 杆件将绕横截面上哪一根轴转动。

解: 压杆失稳时, 将发生弯曲变形。由于杆端约束在各个方向相同, 因此, 压杆将在抗弯刚度最小的平面内失稳, 即杆件横截面将绕其惯性矩最小的形心主惯性轴转动, 如图 5.8-2 所示。

【例 5.8-2】 两端铰支压杆的长度 $L = 1200 \text{ mm}$, 材料为 Q235 钢, $E = 2 \times 10^5 \text{ MPa}$, 截面积 $A = 900 \text{ mm}^2$ 。若截面形状为①正方形、② $d/D = 0.7$ 的空心圆管, 求各杆的临界压力。

解: (1) 正方形截面

计算柔度

$$\text{边长 } a = \sqrt{A} = 30 \text{ mm}$$

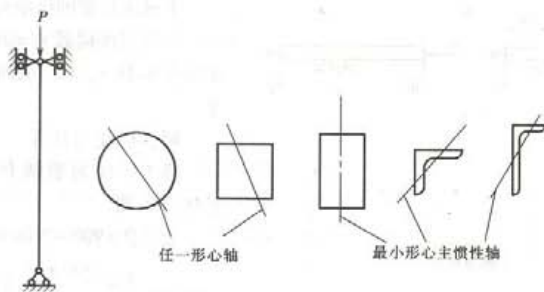


图 5.8-2

$$\text{惯性半径 } i = \sqrt{\frac{I}{A}} = \frac{a}{\sqrt{12}} = \frac{30}{\sqrt{12}} = 8.66 \text{ mm}$$

$$\text{长度系数 } \mu = 1$$

$$\text{所以 } \lambda = \frac{\mu L}{i} = \frac{1 \times 1200}{8.66} = 138.6$$

Q235 钢 $\lambda_p \approx 100$, $\lambda > \lambda_p$, 属细长杆, 可以用欧拉公式计算临界压力, 所以

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{(\mu L)^2} = \frac{\pi^2 \times 2 \times 10^{11} \times \frac{1}{12} (30)^4 \times 10^{-12}}{(1 \times 1.2)^2} = 92.5 \text{ kN}$$

(2) 空心圆截面

$$\text{由 } \frac{\pi}{4} D^2 \left[1 - \left(\frac{d}{D} \right)^2 \right] = A, \text{ 得}$$

$$\text{外径 } D = \sqrt{\frac{4A}{\pi \left[1 - \left(\frac{d}{D} \right)^2 \right]}} = \sqrt{\frac{4 \times 900}{\pi \left[1 - (0.7)^2 \right]}} = 47.4 \text{ mm}$$

$$i = \sqrt{\frac{I}{A}} = \sqrt{\frac{\frac{\pi}{64} (D^4 - d^4)}{\frac{\pi}{4} (D^2 - d^2)}} = \frac{D}{4} \sqrt{1 + \left(\frac{d}{D} \right)^2} = 14.46 \text{ mm}$$

$$\text{所以柔度 } \lambda = \frac{\mu L}{i} = \frac{1 \times 1200}{14.46} = 83$$

Q235 钢的 $\lambda_s = 61.4$, $\lambda_p \approx 100$, 所以 $\lambda_s < \lambda < \lambda_p$, 且属中长杆, 由直线型经验公式可得

$$\sigma_{cr} = a - b\lambda = 304 - 1.12 \times 83 = 211 \text{ MPa}$$

$$P_{cr} = \sigma_{cr} \cdot A = 211 \times 900 = 190 \text{ kN}$$

本题中二杆的截面积、杆长和支承方式均相同, 只是截面形状不同。它们的柔度也不同, 临界压力随柔度的减小而增大。

【例 5.8-3】图 5.8-3 所示托架中的 AB 杆, 直径 $d = 40 \text{ mm}$, 长度 $L = 800 \text{ mm}$, 两端铰支, 材料为 Q235 钢, CD 杆为刚性杆。

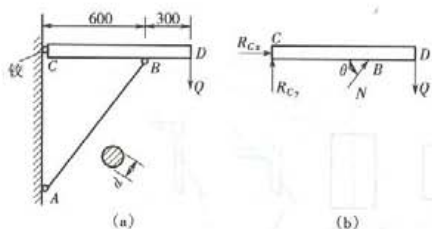


图 5.8.3

①试求托架的极限荷载 Q_{\max} 。

②若工作荷载 $Q = 70 \text{ kN}$, 规定的稳定安全系数 $n_{st} = 2$, 试问此托架是否安全。

解:(1)受力分析

取 CD 杆为脱离体, 由平衡条件

$$\sum M_C = 0, \text{得}$$

$$Q \times 900 - N \sin \theta \times 600 = 0$$

$$N = \frac{900 \times Q}{600 \times \frac{529}{800}} = 2.27Q$$

(2) AB 杆的临界力

$$\text{计算长细比 } \lambda = \frac{\mu L}{i} = \frac{1 \times 800}{40/4} = 80$$

$\lambda < \lambda_p \approx 100$, 属中长杆。若用直线公式计算临界应力, 则临界应力

$$N_{cr} = \sigma_{cr} \cdot A = (a - b\lambda)A = (304 - 1.12 \times 80) \times 10^6 \times \frac{\pi}{4} \times 40^2 \times 10^{-6} = 269.4 \text{ kN}$$

(3) 托架的极限荷载

将 $N = N_{cr}$ 代入 $N = 2.27Q$, 即得

$$Q_{\max} = \frac{N_{cr}}{2.27} = 118.7 \text{ kN}$$

(4) 托架稳定校核

$Q = 70 \text{ kN}$ 时, 托架的工作安全系数

$$n = \frac{Q_{\max}}{Q} = \frac{N_{cr}}{N} = \frac{118.7}{70} = 1.7 < n_{st} = 2$$

所以, 托架稳定性不足。

仿真习题

5.1 力学性能

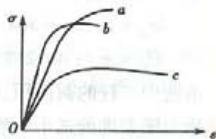
5-1 当低碳钢试件的试验应力 $\sigma = \sigma_s$ 时, 试件将()。

- (A) 完全失去承载能力 (B) 破断
(C) 发生局部颈缩现象 (D) 产生很大的塑性变形

5-2 图示为三种金属材料拉伸时的 $\sigma-\varepsilon$ 曲线, 则有

()。

- (A) b 强度高, c 刚度大, a 塑性好
(B) a 强度高, b 刚度大, c 塑性好
(C) c 强度高, b 刚度大, a 塑性好
(D) 无法判断

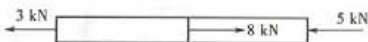


题 5-2 图

5.2 拉伸和压缩

5-3 图示轴向受力杆件,杆内最大拉力为()。

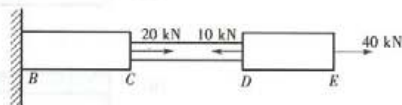
- (A) 8 kN (B) 4 kN
(C) 5 kN (D) 3 kN



题 5-3 图

5-4 在图示阶梯形杆件中,BC 及 DE 部分的横截面积 $A_1 = 400 \text{ mm}^2$, CD 部分的横截面积 $A_2 = 200 \text{ mm}^2$, 杆内最大正应力为()。

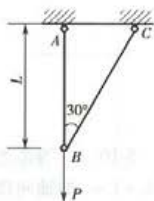
- (A) 125 MPa (B) 100 MPa
(C) 200 MPa (D) 150 MPa



题 5-4 图

5-5 图示桁架,在外力 P 作用下,节点 B 的垂直位移和水平位移分别为()。

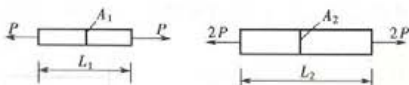
- (A) $0, \frac{1}{2} \Delta L_{AB}$ (B) $\Delta L_{AB}, 0$
(C) $\Delta L_{AB}, \frac{\sqrt{3}}{3} \Delta L_{AB}$ (D) $\Delta L_{AB}, \sqrt{3} \Delta L_{AB}$



题 5-5 图

5-6 如图,两根受拉杆件,若材料相同,杆长 $l_2 = 2l_1$, 横截面积 $A_2 = 2A_1$, 则两杆的伸长 ΔL 和轴向线应变 ε 之间的关系应为()。

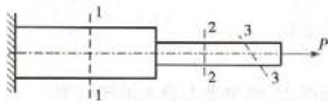
- (A) $\Delta L_2 = \Delta L_1, \varepsilon_2 = \varepsilon_1$ (B) $\Delta L_2 = 2\Delta L_1, \varepsilon_2 = \varepsilon_1$
(C) $\Delta L_2 = 2\Delta L_1, \varepsilon_2 = 2\varepsilon_1$ (D) $\Delta L_2 = \frac{1}{2}\Delta L_1, \varepsilon_2 = \frac{1}{2}\varepsilon_1$



题 5-6 图

5-7 变截面杆受集中力 P 作用,如图所示。设 F_1, F_2 和 F_3 分别表示杆件中截面 1-1、2-2 和 3-3 上沿轴线方向的内力值,则下列结论中正确的是()。

- (A) $F_1 = F_2 = F_3$ (B) $F_1 = F_2 \neq F_3$ (C) $F_1 \neq F_2 = F_3$ (D) $F_1 \neq F_2 \neq F_3$

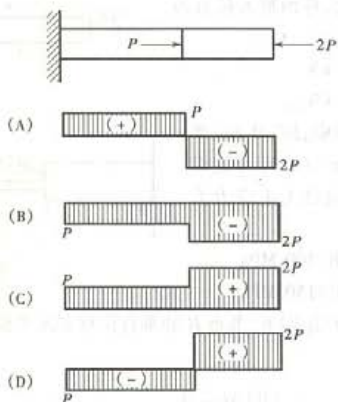


题 5-7 图

5-8 等截面直杆受力 P 作用发生轴向拉伸变形。已知横截面积为 A , 则横截面上的正应力和 45° 斜截面上的正应力分别为()。

- (A) $\frac{P}{A}, \frac{P}{2A}$ (B) $\frac{P}{A}, \frac{P}{\sqrt{2}A}$ (C) $\frac{P}{2A}, \frac{P}{2A}$ (D) $\frac{P}{A}, \frac{\sqrt{2}P}{A}$

5-9 图示受力杆件的轴力图有以下四种,其中正确的是()。



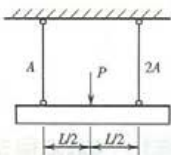
题 5-9 图

5-10 一等截面直杆的材料为低碳钢, $E = 2 \times 10^5$ MPa, 杆的横截面面积 $A = 500$ mm², 杆长 $L = 1$ m, 加轴向拉力 $P = 150$ kN 后, 测得伸长 $\Delta L = 4$ mm, 则卸载后杆的残余变形为()。

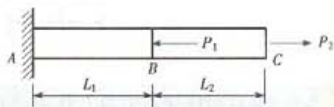
- (A) 0 (B) 1.5 mm (C) 2.5 mm (D) 5.5 mm

5-11 图示结构中二杆的材料相同, 横截面积分别为 A 和 $2A$, 则该结构的许用载荷 $[P]$ 为()。

- (A) $[P] = A[\sigma]$ (B) $[P] = 2A[\sigma]$ (C) $[P] = 3A[\sigma]$ (D) $[P] = 4A[\sigma]$



题 5-11 图



题 5-12 图

5-12 抗拉压刚度为 EA 的等直杆的受力情况如图所示, 则 B 点的位移为()。

- (A) $\frac{P_2 L_2}{EA}$ (B) $\frac{P_1 L_1}{EA}$ (C) $\frac{(P_2 - P_1) L_1}{EA}$ (D) $\frac{(P_1 + P_2) L_1}{EA}$

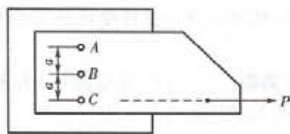
5.3 剪切和挤压

5-13 铆钉联接件受力如图所示, 图中受力最大的铆钉为()。

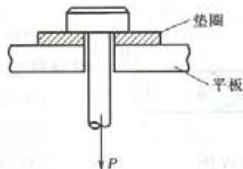
- (A) A, C (B) B (C) C (D) A

5-14 受拉螺栓和平板之间, 垫上一个垫圈, 则可以提高()强度。

- (A) 螺栓的拉伸 (B) 螺栓的剪切 (C) 螺栓的挤压 (D) 平板的挤压



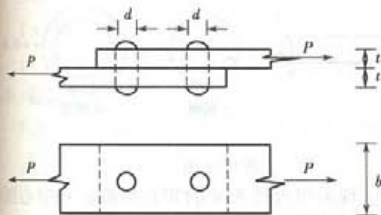
题 5-13 图



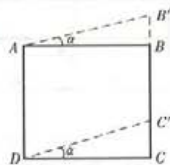
题 5-14 图

5-15 图示铆钉联接, 铆钉的挤压应力 σ_{lm} 是()。

- (A) $\frac{2P}{\pi d^2}$ (B) $\frac{P}{2dt}$ (C) $\frac{P}{2bt}$ (D) $\frac{4P}{\pi d^2}$



题 5-15 图



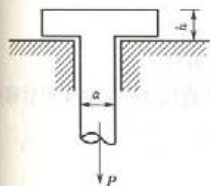
题 5-16 图

5-16 图示单元体在剪应力作用下变成虚线图形, 则其剪应变 γ 为()。

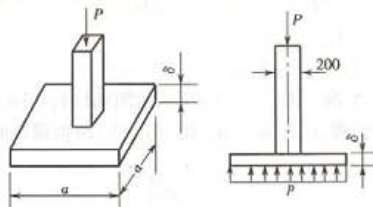
- (A) α (B) $\frac{\pi}{2} - \alpha$ (C) $-\alpha$ (D) $\frac{\pi}{2} + \alpha$

5-17 图示在拉力 P 作用下的螺栓, 已知材料的 $[\tau]$ 是 $[\sigma]$ 的 0.6 倍, 那么螺栓直径 d 和螺拴头高度 h 的合理比值是()。

- (A) 2.4 (B) 6.6 (C) 0.42 (D) 1.7



题 5-17 图

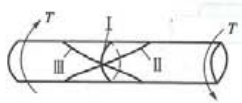


题 5-18 图

5-18 正方形截面的混凝土柱, 横截面边长为 200 mm, 基底为边长 $a = 1$ m 的正方形混凝土板。柱受轴向压力 $P = 100$ kN, 假设地基对混凝土板的支反力为均匀分布, 混凝土的容许剪应力 $[\tau] = 1.5$ MPa, 试问使柱不致穿过板而混凝土板所需的最小厚度 δ 应为()。

- (A) 80 mm (B) 100 mm (C) 125 mm (D) 83 mm

5.4 扭转



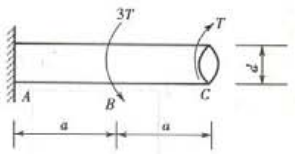
题 5-19 图

5-19 如图所示,铸铁圆截面试件受扭转力偶作用,破坏时试件应()。

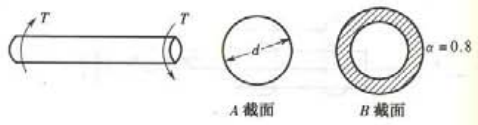
- (A) 沿横截面 I 剪断
- (B) 沿横截面 I 拉断
- (C) 沿螺旋面 II (与试件轴线夹角 45°) 拉断
- (D) 沿螺旋面 III (与试件轴线夹角 45°) 拉断

5-20 图示受扭杆件,横截面为直径 d 的圆截面, B 截面受外力偶 $3T$ 作用, C 截面处受外力偶 T 作用, T 与 $3T$ 的方向相反, 则圆杆中的最大剪应力为()。

- (A) $32 \frac{T}{\pi d^3}$
- (B) $64 \frac{T}{\pi d^3}$
- (C) $16 \frac{T}{\pi d^3}$
- (D) $48 \frac{T}{\pi d^3}$



题 5-20 图



题 5-21 图

5-21 图示两端受外力偶 T 作用的受扭杆件,现采用直径为 d 的实心圆截面和空心圆截面(内、外径之比 $\alpha = 0.8$) 两种形式,两者横截面面积相同,则它们的最大剪应力关系为()。

- (A) $\tau_A = \tau_B$
- (B) $\tau_A > \tau_B$
- (C) $\tau_A < \tau_B$
- (D) $\tau_A \approx \tau_B$

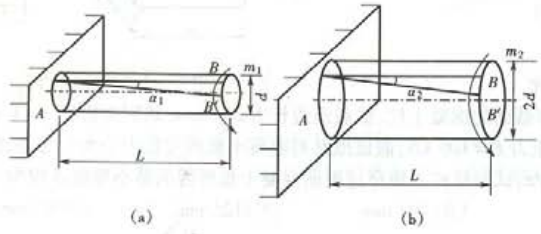
5-22 若将圆轴的直径增加到原来直径的 1.5 倍,其他条件不变,则轴内的最大剪应力和单位长度扭角分别减少为原来的()。

- (A) $\frac{8}{27}, \frac{8}{81}$
- (B) $\frac{4}{9}, \frac{8}{27}$
- (C) $\frac{8}{27}, \frac{16}{81}$
- (D) $\frac{4}{9}, \frac{16}{81}$

5-23 空心圆截面杆两端受外力偶矩 T 作用发生扭转,现分别采用 a 和 b 两种横截面,已知 $\alpha_a^2 = \left(\frac{d_1}{D_1}\right)^2 = 0.8$, $\alpha_b^2 = \left(\frac{d_2}{D_2}\right)^2 = 0.6$ 。而横截面积 $A_a = A_b$, 则它们的最大剪应力关系是()。

- (A) $\tau_a = \tau_b$
- (B) $\tau_a \approx \tau_b$
- (C) $\tau_b > \tau_a$
- (D) $\tau_a > \tau_b$

5-24 图(a)、(b)所示两圆轴材料相同,外表面上与轴线平行的直线 AB 在轴变形后移到 AB' 位置,已知 $\alpha_1 = \alpha_2$, 则(a)、(b)两轴横截面上的最大剪力关系为()。



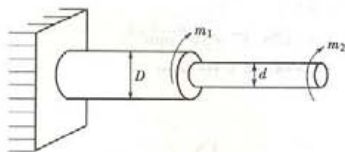
题 5-24 图

- (A) $\tau_a > \tau_b$ (B) $\tau_a < \tau_b$ (C) $\tau_a = \tau_b$ (D) 无法比较

5-25 图示为一阶梯形圆轴,其直径之比 $\frac{D}{d} =$

2,欲使轴内最大剪应力相等,则外力偶 m_1 和 m_2 之间应有()关系。

- (A) $m_1 = m_2$ (B) $m_1 = 3m_2$
(C) $m_1 = 7m_2$ (D) $m_1 = 5m_2$



题 5-25 图

5-26 铸铁圆轴扭转时,沿与轴线成 45° 的螺旋面断裂,这与()有关。

- (A) 最大剪应力 (B) 最大压应力 (C) 最大线应变 (D) 最大拉应力

5-27 切应力互等定理只适用于()。

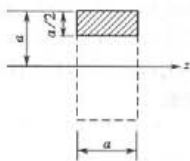
- (A) 纯剪切应力状态 (B) 线弹性范围
(C) 单元体上两个相互垂直平面上的剪应力分析 (D) 受剪切的构件

5.5 截面几何性质

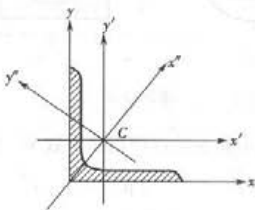
5-28 图示带阴影部分的图形对 z 轴的静矩 S_z 和惯性矩 I_z 为()。

- (A) $S_z = \frac{a^3}{8}, I_z = \frac{7a^4}{24}$ (B) $S_z = \frac{3a^3}{8}, I_z = \frac{7a^4}{24}$
(C) $S_z = \frac{a^3}{8}, I_z = \frac{a^4}{96}$ (D) $S_z = \frac{3a^3}{8}, I_z = \frac{a^4}{96}$

5-29 图示等边角钢的横截面积为 A ,形心在 C 点,下列结论中哪些是正确的()。



题 5-28 图



题 5-29 图

- (1) $I_x = I_y, I_{x'} = I_{y'}, I_{x''} = I_{y''}$
(2) $I_{xy} > 0, I_{x'y'} < I_{xy}, I_{x''y''} = 0$
(3) $I_x > I_y$

- (A) (1), (2) (B) (2), (3) (C) (1), (3) (D) 全对

5-30 如图所示正方形截面,其中 C 点为形心, K 为边界上任一点,则过 C 点和 K 点主轴的对数为()。

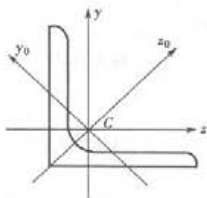
- (A) 过 C 点有两对正交的形心主轴,过 K 点有一对正交主轴
(B) 过 C 点有无数对,过 K 点有一对
(C) 过 C 点有无数对,过 K 点有两对
(D) 过 C 点和 K 点均有一对



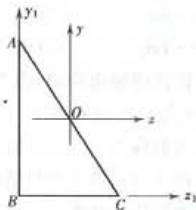
题 5-30 图

5-31 图示等边角钢截面, C 为形心, 已知 $I_y = 179.51 \times 10^4 \text{ mm}^4$, $I_{y_0} = 284.68 \times 10^4 \text{ mm}^4$, 则 I_{y_0} 等于()。

- (A) $105.17 \times 10^4 \text{ mm}^4$ (B) $464.19 \times 10^4 \text{ mm}^4$
(C) $74.34 \times 10^4 \text{ mm}^4$ (D) $37.17 \times 10^4 \text{ mm}^4$



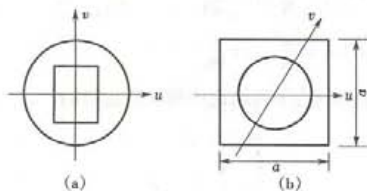
题 5-31 图



题 5-32 图

5-32 图中 O 点为直角三角形 ABC 斜边上的中点, y, z 轴过中点 O 且分别平行于两条直角边, 则三角形的惯性积 I_{yz} 为()。

- (A) $I_{yz} > 0$ (B) $I_{yz} < 0$ (C) $I_{yz} = 0$ (D) $I_{yz} = I_{yx}$



题 5-33 图

5-33 图示 (a)、(b) 两截面, (a) 为带矩形孔的圆形, (b) 为带圆孔的正方形, u, v 均为形心主轴, 关于惯性矩 I_u, I_v 有四种答案, 其中正确的是()。

- (A) $I_u(a) > I_v(a); I_u(b) = I_v(b)$
(B) $I_u(a) > I_v(a); I_u(b) > I_v(b)$
(C) $I_u(a) < I_v(a); I_u(b) = I_v(b)$
(D) $I_u(a) < I_v(a); I_u(b) < I_v(b)$

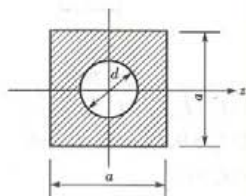
5.6 弯曲

5-34 图示截面的抗弯截面系数 W_z 为()。

- (A) $\frac{a^3}{6} - \frac{\pi d^3}{32}$ (B) $\frac{a}{6} (a-d)^2$
(C) $\frac{a^3}{6} - \frac{\pi d^3}{32a}$ (D) $\frac{a^3}{6} - \frac{\pi d^3}{16}$

5-35 悬臂梁受载情况如图所示, 设 M_A 及 M_C 分别表示梁上 A 截面和 C 截面上的弯矩, 则下面结论中正确的是()。

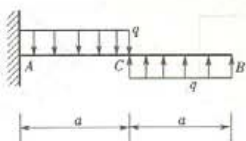
- (A) $M_A > M_C$ (B) $M_A < M_C$
(C) $M_A = M_C$ (D) $M_A = -M_C$



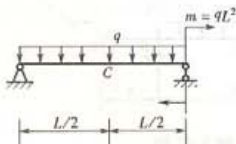
题 5-34 图

5-36 图示简支梁跨中截面 C 上的剪力和弯矩为()。

- (A) $Q = qL, M = \frac{3}{8}qL^2$ (B) $Q = 1.5qL, M = -\frac{7}{8}qL^2$
(C) $Q = -qL, M = -\frac{3}{8}qL^2$ (D) $Q = 0, M = \frac{5}{8}qL^2$



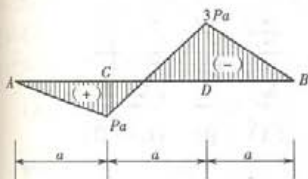
题 5-35 图



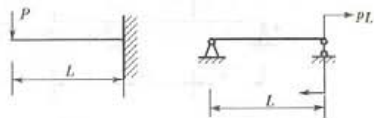
题 5-36 图

- 5-37 图示梁的弯矩图,则梁上的最大剪力为()。
- (A) P (B) $3P$ (C) $4P$ (D) $-4P$

- 5-38 图示悬臂梁和简支梁长度相等,它们的剪力图和弯矩图是否异同?
- (A) Q 图相同, M 图不同 (B) Q 图不同, M 图相同
- (C) Q 图和 M 图均相同 (D) Q 图和 M 图均不相同

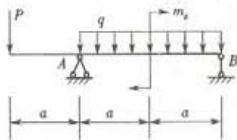


题 5-37 图

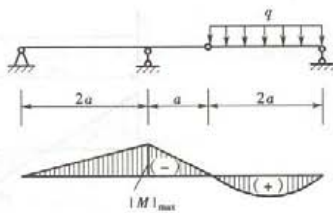


题 5-38 图

- 5-39 如图所示,当外力偶 m_e 的位置在梁的 AB 段内改变时,下列结论正确的是()。
- (A) Q 图、 M 图都改变 (B) Q 图、 M 图都不变
- (C) M 图不变,只 Q 图改变 (D) Q 图不变,只 M 图改变



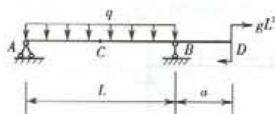
题 5-39 图



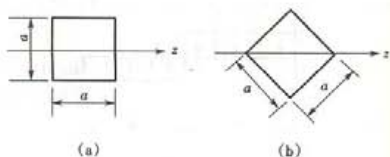
题 5-40 图

- 5-40 在图示梁弯矩图中, $|M|_{\max}$ 之值为()。
- (A) $\frac{3qa^2}{2}$ (B) $1.2qa^2$ (C) $1.6qa^2$ (D) qa^2
- 5-41 已知外伸梁受荷载如图,则跨中截面 C 的剪力和弯矩为()。
- (A) $Q = -gL, M = \frac{3}{8}gL^2$ (B) $Q = -gL, M = -\frac{3}{8}gL^2$
- (C) $Q = gL, M = -\frac{3}{8}gL^2$ (D) $Q = gL, M = \frac{3}{8}gL^2$

- 5-42 边长为 a 的正方形截面梁,按两种不同的形式放置,如图示,在相同弯矩作用下两



题 5-41 图

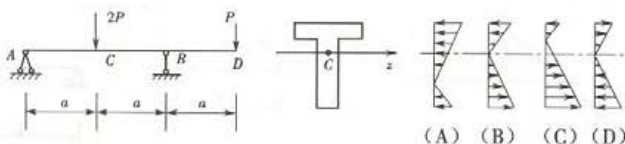


题 5-42 图

者最大正应力之比 $\frac{(\sigma_{\max})_a}{(\sigma_{\max})_b}$ 为 ()。

- (A) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (B) 1 (C) $\frac{1}{2}$ (D) $\sqrt{2}$

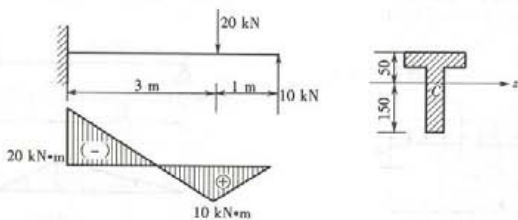
5-43 T 形截面外伸梁受载如图, AC 段横截面上的正应力分布图是 ()。



题 5-43 图

5-44 悬臂梁及其弯矩图如图所示, z 轴的截面对中性轴的惯矩 $I_z = 2 \times 10^7 \text{ mm}^4$, 则梁上最大拉应力 $\sigma_{t, \max}$ 为 ()。

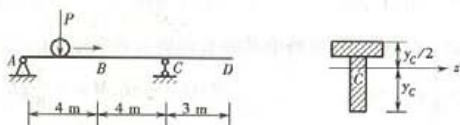
- (A) 50 MPa (B) 150 MPa (C) 25 MPa (D) 75 MPa



题 5-44 图

5-45 图示梁, 受移动荷载 P 作用, P 移到下列哪一截面处梁内的拉应力最大?

- (A) A (B) B (C) C (D) D

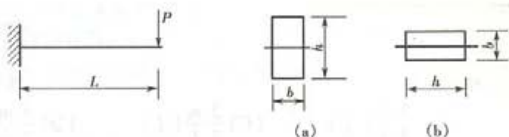


题 5-45 图

5-46 图示梁的截面为矩形,放置形式分别如图(a)、(b)所示,已知边长 $b = \frac{h}{2}$,则两者横

截面上最大拉应力之比 $\frac{\sigma_a}{\sigma_b}$ 应为()。

- (A) 2 (B) $\frac{1}{2}$ (C) 4 (D) $\frac{1}{4}$



题 5-46 图

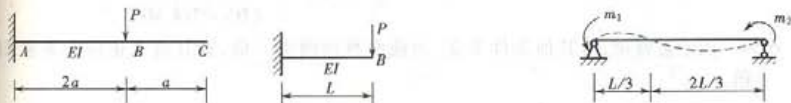
5-47 由梁的正应力强度条件确定梁的合理截面形式,其根据是()。

- (A) $W/A = 1$ 好 (B) $W/A = 2$ 好 (C) W/A 越小越好 (D) W/A 越大越好

5-48 图示悬臂梁抗弯刚度为 EI , B 处受集中力 P 作用,其 C 处的挠度为()。

- (A) $\frac{8Pa^3}{3EI}$ (B) $\frac{5Pa^3}{6EI}$ (C) $\frac{7Pa^3}{3EI}$ (D) $\frac{14Pa^3}{3EI}$

提示:下图所示结构 B 点的挠度 $f_B = \frac{PL^3}{3EI}$, 转角 $\theta_B = \frac{PL^2}{2EI}$ 。



题 5-48 图

题 5-49 图

5-49 图示简支梁的 EI 为已知, A 、 B 端各作用一力偶 m_1 和 m_2 , 若使该梁的挠曲线的拐点 C 位于距 A 端 $\frac{L}{3}$ 处, 则 m_1 和 m_2 的关系为()。

- (A) $m_1 = 2m_2$ (B) $m_2 = 2m_1$ (C) $m_1 = 3m_2$ (D) $m_2 = 3m_1$

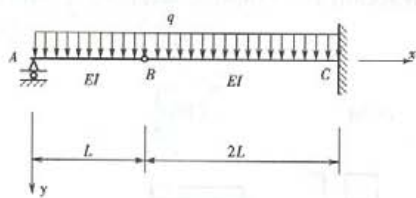
5-50 画梁的挠曲线大致形状时应考虑()。

- (A) 梁的刚度 (B) 梁的外力分布
(C) 梁的支座和弯矩的正负号 (D) 坐标系的选择

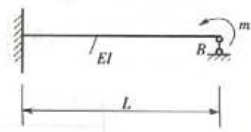
5-51 用积分法求图示梁的挠曲线方程时,其边界条件和连续条件为()。

- (A) $x=0, y_A=0,$
 $x=3L, y_C=0, \theta_C=0,$
 $x=L, \theta_{B左} = \theta_{B右}$
(B) $x=0, y_A=0, \theta_A=0,$
 $x=3L, y_C=0,$
 $x=L, y_{B左} = y_{B右}$
(C) $x=0, \theta_A=0,$
 $x=3L, y_C=0, \theta_C=0,$
 $x=L, \theta_{B左} = \theta_{B右}$
(D) $x=0, y_A=0,$
 $x=3L, y_C=0, \theta_C=0$
 $x=L, y_{B左} = y_{B右}$

5-52 图示梁在 B 处作用集中力偶 m , 则支座 B 的约束反力 R_B 为()。

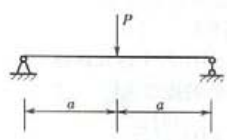


题 5-51 图

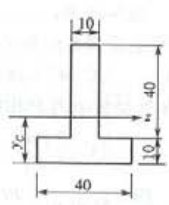


题 5-52 图

- (A) $\frac{2}{3} \frac{m}{L}$ (↑) (B) $\frac{2}{3} \frac{m}{L}$ (↓) (C) $\frac{3}{2} \frac{m}{L}$ (↑) (D) $\frac{3}{2} \frac{m}{L}$ (↓)



题 5-53 图

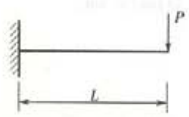


5-53 横截面为倒 T 形的简支梁, 跨中受集中力 P 作用, 已知 $P = 4 \text{ kN}$, $y_c = 17.5 \text{ mm}$, $I_x = 18.2 \times 10^4 \text{ mm}^4$, $a = 2 \text{ m}$, 则梁中最大正应力为 ()。

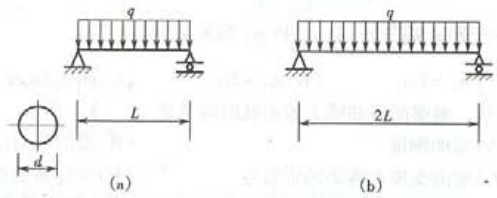
- (A) 385 MPa
(B) -385 MPa
(C) 714 MPa
(D) -714 MPa

5-54 图示悬臂梁, 若其他条件不变, 而截面直径增大一倍, 则其最大正应力是原来的 () 倍。

- (A) 2 (B) $\frac{1}{2}$ (C) $\frac{1}{8}$ (D) 8



题 5-54 图



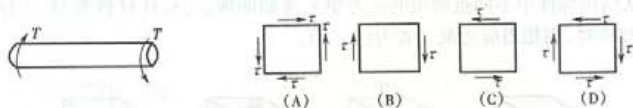
题 5-55 图

5-55 图示简支梁 (a) 和 (b) 受均布载荷 q 作用, 已知两梁的 EI 相同, 则 (b) 梁的最大挠度应为 (a) 梁的最大挠度的 () 倍。

- (A) 8 (B) 2 (C) 16 (D) 4

5.7 应力状态

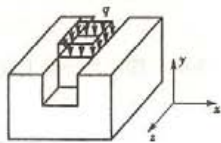
5-56 图示从受扭转杆件上截取出的一点的应力状态图, 应为 ()。



题 5-56 图

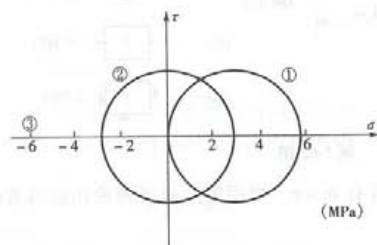
5-57 把一弹性块体放入刚性槽内,受均布力 q 如图所示。已知块体弹性模量为 E ,泊松比为 ν ,且立方体与刚性槽之间的摩擦力以及刚性槽的变形可以忽略不计,则立方体上的应力 σ_x 为()。

- (A) $-q$ (B) $(1+\nu)q$
 (C) $-(1+\nu)q$ (D) $-\nu q$



题 5-57 图

5-58 图示为三个平面应力状态的应力圆,则应力圆②所对应的主单元体为()。



题 5-58 图

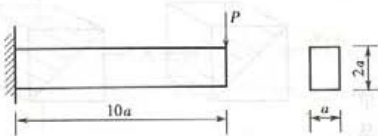
- (A) $\sigma_1 = 6$
 (B) $\sigma_1 = 3$
 (C) $\sigma_2 = -3$
 (D) $\sigma_1 = 3$

5-59 图示悬臂梁上危险点的最大剪应力为()。

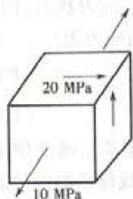
- (A) $\frac{0.75P}{a^2}$ (B) $\frac{7.5P}{a^2}$ (C) $\frac{0.5P}{a^2}$ (D) $\frac{15P}{a^2}$

5-60 单元体各面的应力如图所示,其最大正应力和最大剪应力为()。

- (A) $\sigma_{\max} = 10 \text{ MPa}, \tau_{\max} = 20 \text{ MPa}$ (B) $\sigma_{\max} = 20 \text{ MPa}, \tau_{\max} = 20 \text{ MPa}$
 (C) $\sigma_{\max} = 20 \text{ MPa}, \tau_{\max} = 15 \text{ MPa}$ (D) $\sigma_{\max} = 10 \text{ MPa}, \tau_{\max} = 25 \text{ MPa}$

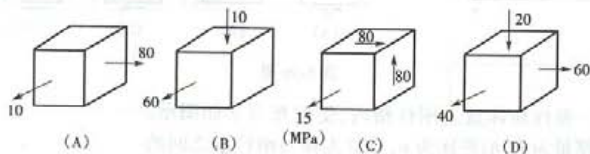


题 5-59 图



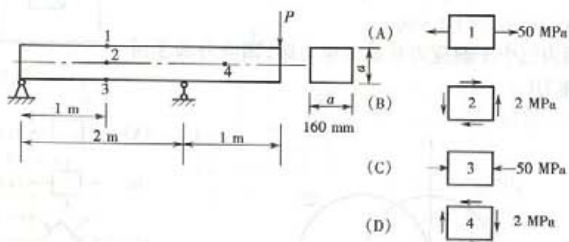
题 5-60 图

5-61 从结构构件中不同点取出的应力单元体如图所示,构件材料为 Q235 钢材,若以第三强度理论校核时,则相当应力最大者为()。



题 5-61 图

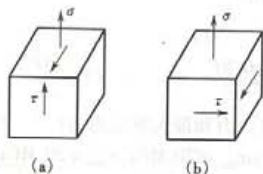
5-62 图示外伸梁上取出的四个应力单元体,其中错误者为()。



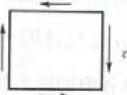
题 5-62 图

5-63 两单元体的应力状态如图,且有 $\sigma = \tau$ 。当用第三强度理论比较两者的危险程度时,则()最危险。

- (A)(a) (B)(b) (C)(a)与(b)一样 (D)不确定



题 5-63 图

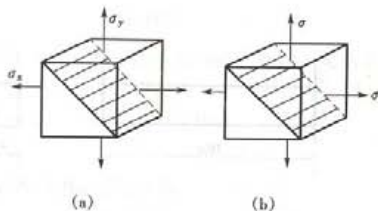


题 5-64 图

5-64 图示应力状态,用第三强度理论校核时,其相当应力为()。

- (A) $\sqrt{2}\tau$ (B) τ
(C) $\sqrt{3}\tau$ (D) 2τ

5-65 根据第三强度理论,判断图示单元体中用阴影线标出的危险面(45°斜面)是否正确,现有四种答案,其中正确的是()。



题 5-65 图

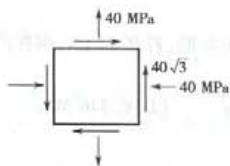
- (A) (a)、(b) 都正确
 (B) (a)、(b) 都不正确
 (C) (a) 正确, (b) 不正确
 (D) (a) 不正确, (b) 正确

5-66 图示单元体的主应力大小及方向为()。

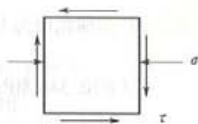
- (A) $\sigma_1 = 40 \text{ MPa}, \alpha_0 = 30^\circ$ (B) $\sigma_1 = 80 \text{ MPa}, \alpha_0 = 30^\circ$
 (C) $\sigma_1 = 40 \text{ MPa}, \alpha_0 = 60^\circ$ (D) $\sigma_1 = 80 \text{ MPa}, \alpha_0 = 60^\circ$

5-67 单元体的应力状态如图所示, 关于其主应力有下列四种答案, 其中正确的是()。

- (A) $\sigma_1 > \sigma_2 > 0, \sigma_3 = 0$ (B) $\sigma_3 < \sigma_2 < 0, \sigma_1 = 0$
 (C) $\sigma_1 > 0, \sigma_2 = 0, \sigma_3 < 0, |\sigma_1| < |\sigma_3|$ (D) $\sigma_1 > 0, \sigma_2 = 0, \sigma_3 < 0, |\sigma_1| > |\sigma_3|$



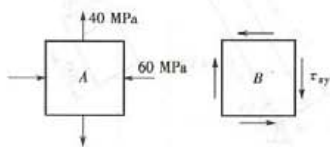
题 5-66 图



题 5-67 图

5-68 A、B 两点的应力状态如图所示。已知两点处的主拉应力 σ_1 相同, 则 B 点应力状态中 τ_{xy} 为()。

- (A) 40 MPa (B) 60 MPa
 (C) 50 MPa (D) 20 MPa

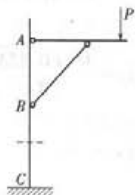


题 5-68 图

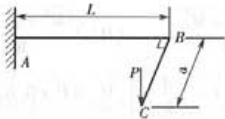
5.8 组合变形

5-69 图示结构中, 杆件 ABC 上 BC 段的变形为()。

- (A) 弯曲 + 扭转 (B) 弯曲 + 轴向拉伸 (C) 弯曲 + 轴向压缩 (D) 轴向压缩



题 5-69 图



题 5-70 图

5-70 直径为 d 的圆截面钢质折杆, 置于水平面内, A 端固定, C 端受铅垂集中力 P 。若以第三强度理论校核危险点应力时, 其相当应力表达式为()。

- (A) $\frac{\sqrt{(Pa)^2 + (PL)^2}}{W}$ (B) $\frac{Pa^2}{2W} + \frac{PL}{W}$

$$(C) \sqrt{\left(\frac{PL}{W}\right)^2 + 3\left(\frac{Pa}{2W}\right)^2}$$

$$(D) \frac{\sqrt{(PL)^2 - (Pa)^2}}{W}$$

其中 $W = \frac{\pi d^3}{32}$ 。

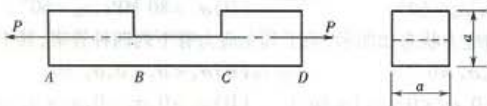
5-71 图示构件 BC 段的最大应力为其他段的()倍。

(A) 2

(B) 4

(C) 6

(D) 8



题 5-71 图

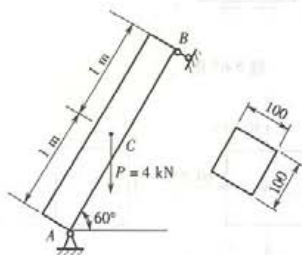
5-72 图示一斜杆 AB 的横截面为 100 mm × 100 mm 的正方形, 若 $P = 4$ kN, 则杆内最大压应力为()。

(A) 6 MPa

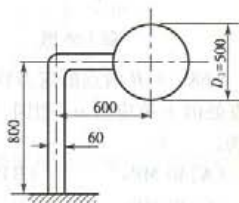
(B) 0.346 MPa

(C) 5.654 MPa

(D) 6.346 MPa



题 5-72 图



题 5-73 图

5-73 图示为铁路标圆形信号板, 安装在外径 $D = 60$ mm、内径 $d = 54$ mm 的空心圆柱上, 信号板所受的最大风压 $p = 2$ kN/m², 立柱材料的许用应力 $[\sigma] = 60$ MPa, 则按第三强度理论校核时的相当应力表达式为()。

$$(A) \frac{\sqrt{M^2 + M_T^2}}{W} \quad (B) \frac{\sqrt{M^2 + 0.75M_T^2}}{W} \quad (C) \frac{\sqrt{M^2 + M_T^2}}{2W} \quad (D) \frac{\sqrt{M^2 + 0.75M_T^2}}{2W}$$

其中 $W = \frac{\pi D^3}{32} \left[1 - \left(\frac{d}{D}\right)^4 \right]$, $M_T = P \times 0.6$, $M = P \times 0.8$, $P = p \times \frac{\pi}{4} (D_1^2)$ 。

5.9 压杆稳定

5-74 图示受压杆件, 上端为弹性支承, 下端为固定, 该压杆的长度系数为()。

(A) $\mu > 2$

(B) $0.7 < \mu < 2$

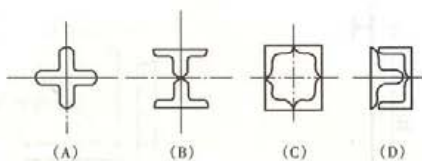
(C) $0.5 < \mu < 0.7$

(D) $\mu < 0.5$

5-75 用四个等肢角钢拼接成的轴压杆件, 截面形式如图所示, 其承载能力最大者为()。



题 5-74 图



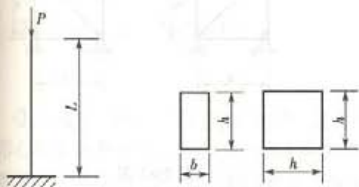
题 5-75 图

5-76 长方形截面细长压杆,如图示。 $\frac{b}{h} = 0.5$,如将 b 改为 h 后仍为细长杆,则临界力 P_{cr} 是原来杆的()倍。

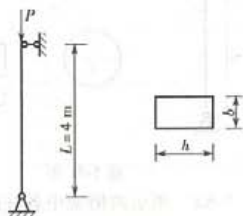
- (A) 2 (B) 4 (C) 8 (D) 10

5-77 图示轴心受压杆件,两端为球铰支承,材料为 Q235 钢, $E = 2 \times 10^5$ MPa, 截面为矩形 ($h \times b = 200 \text{ mm} \times 100 \text{ mm}$), 稳定计算中其长细比应取用()。

- (A) $\sqrt{12} \frac{L}{h}$ (B) $\sqrt{12} \frac{L}{b}$ (C) $\frac{\sqrt{12} L}{2 h}$ (D) $0.7 \sqrt{12} \frac{L}{b}$



题 5-76 图



题 5-77 图

5-78 图示两根细长压杆,其横截面皆为直径 d 的圆形,则(b)杆的临界应力与(a)杆的临界应力之比为()。

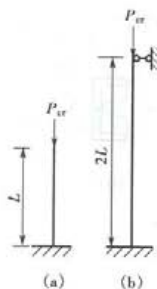
- (A) 0.98 (B) 0.49 (C) 1.02 (D) 2.04

5-79 用等边角钢制成的一端固定、一端自由的细长压杆,已知材料的弹性模量为 E , $I_x = m, I_y = n$,形心为 C ,杆长为 L ,临界力 P_{cr} 有下列几种答案,则其中正确者为()。

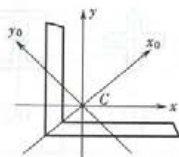
- (A) $\frac{\pi^2 E n}{(2L)^2}$ (B) $\frac{\pi^2 E (n - m)}{(2L)^2}$ (C) $\frac{\pi^2 E (2m - n)}{(2L)^2}$ (D) $\frac{\pi^2 E m}{(2L)^2}$

5-80 由 EI 相同的三根圆杆(细长杆)组成一支架,如图示。A、C、D 三点为铰接, B 为固定端,则作用于 D 点的临界力 P_{cr} 为()。

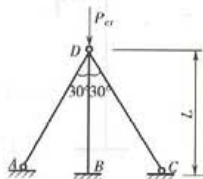
- (A) $\frac{3.34 \pi^2 EI}{L^2}$ (B) $\frac{4.04 \pi^2 EI}{L^2}$ (C) $\frac{3 \pi^2 EI}{L^2}$ (D) $\frac{2.3 \pi^2 EI}{L^2}$



题 5-78 图



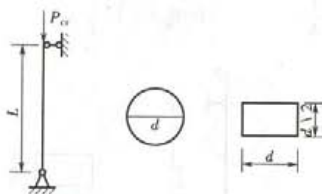
题 5-79 图



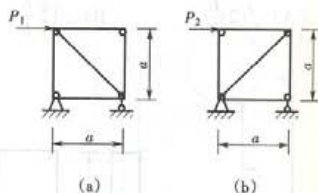
题 5-80 图

5-81 图示为两根材料、长度和约束条件都相同的细长杆, (a) 杆截面为直径 d 的圆形, (b) 杆截面为边长 $d \times \frac{d}{2}$ 的矩形, 则 $\frac{P_{cr(a)}}{P_{cr(b)}}$ 为 ()。

(A) $\pi:2$ (B) $2\pi:5$ (C) $3\pi:2$ (D) $2\pi:3$



题 5-81 图



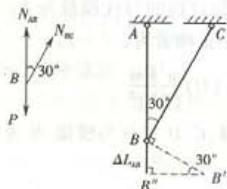
题 5-82 图

5-82 图示两桁架中各杆的材料和截面均相同, 设 P_1 和 P_2 分别为这两个桁架稳定的最大荷载, 则 P_1 和 P_2 之间的正确关系是 ()。

(A) $P_1 = P_2$ (B) $P_1 < P_2$ (C) $P_1 > P_2$ (D) 不能确定其关系

习题答案

5-1 (D) 5-2 (B) 5-3 (D) 5-4 (D)



5-5 题解图

5-5 (D) 解题思路:

(1) 先求桁架各杆轴力
由节点 B 的平衡条件, 得

$$N_{BC} = 0, \quad N_{AB} = P$$

(2) 求各杆的变形

$$\Delta L_{AB} = \frac{NL}{EA} = \frac{PL}{EA}, \quad \Delta L_{BC} = 0$$

(3) 作结构变形位移图

依据变形与受力相一致的原则(杆受拉力则产生伸长变形)及小变形下以切线代替圆弧, 得如图变形位移图。由变形位移图可知:

B 节点的垂直位移 $\delta_v = \Delta L_{AB} (\downarrow)$

B 节点的水平位移 $\delta_H = \frac{\Delta L_{AB}}{\tan 30^\circ} = \sqrt{3} \Delta L_{AB} (\rightarrow)$

所以应选答案(D)。

如变形位移图作得不正确,则将导致错误结论。

5-6 (B) 5-7 (A) 5-8 (A) 5-9 (B)

5-10 (C)。解题思路:卸载是线弹性的, $\sigma_{30} = E\varepsilon_{30}$, 则

$$\varepsilon_{30} = \frac{\sigma_{30}}{E} = \frac{150 \times 10^3}{2 \times 10^5 - 10^6} = 150 \times 10^{-5}$$

卸载后杆的残余变形

$$\Delta L_s = \Delta L - \varepsilon_{30} \cdot L = 4 - 150 \times 10^{-5} \times 10^{-3} = 2.5 \text{ mm}$$

故应选答案(C)。

5-11 (B) 5-12 (C)

5-13 (C)。解题思路:如图,因 P 力作用线不通过铆钉群形心,故三铆钉受力不等,为此

①将 P 力平移到作用线通过铆钉群形心 B , 得

$$\text{一力 } P' = P$$

$$\text{一力偶 } m = pa (\uparrow)$$

② P' 力使三铆钉受力相同

$$F' = \frac{P}{3}$$

③力偶 m 使每一铆钉受力不等,其大小与该铆钉离铆钉群形心的垂直距离成正比,力的方向垂直于各铆钉截面形心与铆钉群形心间的连线。所以三铆钉的受力情况如图所示。

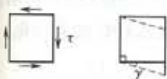
且 $F'' \times 2a = pa$, 所以

$$F'' = \frac{P}{2}$$

显然, C 点受力为 $F' + F'' = \frac{P}{3} + \frac{P}{2} = \frac{5}{6}P (\rightarrow)$ 。

故应选答案(C)。

5-14 (D) 5-15 (B)



5-16 题解图

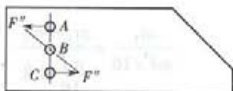
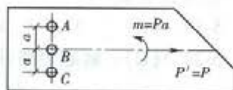
5-16 (C)。解题思路:如图因材料力学中对剪应力 τ 正负号作的规定是:以其向量对单元体内任一点产生顺时针转向的向量矩者为正,反之为负。与此相应,材料力学中规定单元体左下直角减小时剪应变 γ 为负,左下直角增大时剪应变 γ 为正。

故应选答案(C)。

5-17 (A)

5-18 (A)。解题思路:本题关键是正确判断剪切面及相应剪力 Q 的计算。

混凝土板如果剪切强度不够,则混凝土柱会戳穿混凝土板,其剪切面是戳穿的孔的四个侧面,如图,其剪切面的面积



5-13 题解图



5-18 题解图

$$A_Q = 4 \times 0.2\delta = 0.8\delta \text{ (m}^2\text{)}$$

地基的支承反力均匀分布,其值为 p ,即

$$p = \frac{P}{a^2} = \frac{100 \times 10^3}{1^2} = 0.1 \text{ MPa}$$

剪切面上的剪力为

$$Q = P - p \times (0.2)^2 = 96 \text{ kN}$$

由混凝土板的剪切强度条件,得

$$\tau = \frac{Q}{A_Q} = \frac{96 \times 10^3}{0.8\delta} < [\tau]$$

$$\delta \gg \frac{96 \times 10^3}{0.8[\tau]} = \frac{96 \times 10^3}{0.8 \times 1.5 \times 10^6} = 80 \times 10^{-3} = 80 \text{ mm}$$

取 $\delta = 80 \text{ mm}$ 。

若计算剪力时不扣除地基反力 $(0.2)^2 P$,则 $Q = P$ 就得到错误结果。

$$\delta \geq \frac{100 \times 10^3}{0.8[\tau]} = \frac{100 \times 10^3}{0.8 \times 1.5 \times 10^6} = 83 \text{ mm}$$

故应选答案(A)。

5-19 (C) 5-20 (A) 5-21 (B) 5-22 (C) 5-23 (C)

5-24 (C)。解题思路:因两轴表面上一点的剪应变 τ 相等。

$\gamma_a = \alpha_1, \gamma_b = \alpha_2$, 又已知 $\alpha_1 = \alpha_2$, 所以

$$\gamma_a = \gamma_b$$

由剪切胡克定律,即得两轴横截面上的最大剪应力相等。

故应选答案(C)。

5-25 (C)。解题思路:因 $\tau_1 = \frac{m_2}{\pi d^3/16}, \tau_2 = \frac{m_1 + m_2}{\frac{\pi D^3}{16}} = \frac{m_1 + m_2}{\frac{\pi d^3}{16} \times 8}$, 由 $\tau_1 = \tau_2$, 得

$$\frac{m_2}{\pi d^3/16} = \frac{m_1 + m_2}{\frac{\pi d^3}{16} \times 8}$$

所以 $m_1 = 7m_2$

故应选答案(C)。

5-26 (D) 5-27 (C) 5-28 (B) 5-29 (B) 5-30 (B) 5-31 (C)

5-32 (C)。解题思路:因 $\triangle ABC$ 可分解为 $\triangle ABO$ 及 $\triangle OBC$, 而 z 轴为 $\triangle ABO$ 的对称轴, 所以 $\triangle ABO$ 的 $I_{yz} = 0$; 又 y 轴为 $\triangle OBC$ 的对称轴, 所以 $\triangle OBC$ 的 $I_{yz} = 0$, 所以 $\triangle ABC$ 的 $I_{yz} = 0$ 。

故选答案(C)。

5-33 (C) 5-34 (C) 5-35 (A) 5-36 (C)

5-37 (D)。解题思路:本题应该用微分关系 $\frac{dM}{dx} = Q$ 来判断。 $\frac{dM}{dx} = 0$ 的几何意义是弯矩图上某点的切线斜率等于梁上相应截面上的剪力。

M 图上 CD 段的斜率 $\frac{-3Pa - Pa}{a} = -4P$ 最大绝对值。

应选答案(D)。

5-38 (C)

5-39 (D)。解题思路:外力偶 m 在梁 AB 段内位置变动时,由力偶的性质及平衡条件可知, A、B 支座反力均不改变。所以剪力图不变,只弯矩图改变。

故应选答案(D)。

5-40 (D)

5-41 (B)。解题思路:如图,本题为求指定截面的剪力和弯矩,可用

$$Q = \sum Y_i$$

$$M = \sum M_{C_i} \text{ 来求,为此先求出支反力 } R_A$$

$$\sum M_B = 0$$

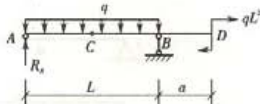
$$R_A \cdot L + qL^2 - \frac{1}{2}qL^2 = 0$$

$$R_A = -\frac{1}{2}qL (\downarrow)$$

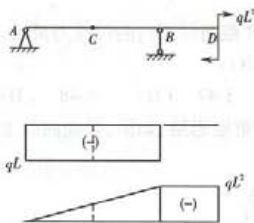
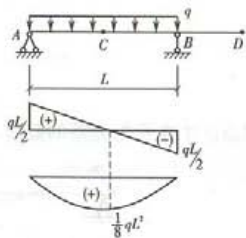
$$Q_C = \sum Y_i = R_A - \frac{1}{2}qL = -\frac{1}{2}qL - \frac{1}{2}qL = -qL$$

$$M_C = R_A \cdot \frac{L}{2} - \frac{1}{2}q\left(\frac{L}{2}\right)^2 = \left(-\frac{qL}{2}\right) \cdot \frac{L}{2} - \frac{1}{2}q\left(\frac{L}{2}\right)^2 = -\frac{qL^2}{4} - \frac{1}{8}qL^2 = -\frac{3}{8}qL^2$$

亦可用叠加法,如图:



5-41 题解图 1



5-41 题解图 2

$$Q_C = 0 - qL = -qL$$

$$M_C = \frac{1}{8}q^2L - \frac{1}{2}qL^2 = -\frac{3}{8}qL^2$$

故应选答案(B)。

5-42 (A) 5-43 (B)

5-44 (D)。解题思路:因截面不对称于中性轴,故应分别计算全梁正、负弯矩数值较大截面上的拉应力,从中找出 $\sigma_{t, \max}$ 。

由 $\sigma = \frac{My}{I_z}$, 先计算固端截面,因弯矩为负,拉应力产生在截面上边缘点

$$\sigma_1 = \frac{20 \times 10^3 \times 50 \times 10^{-3}}{2 \times 10^7 \times 10^{-12}} = 50 \text{ MPa}$$

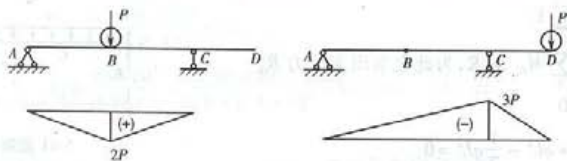
再计算集中荷载作用截面,弯矩为正,拉应力产生在截面下边缘点

$$\sigma_1 = \frac{10 \times 10^3 \times 150 \times 10^{-3}}{2 \times 10^7 \times 10^{-12}} = 75 \text{ MPa}$$

所以梁上最大拉应力 $\sigma_{1,\max} = 75 \text{ MPa}$,产生在集中荷载作用截面下边缘点上。

故应选答案(D)。

5-45 (B) 解题思路:如图,将荷载移到B截面、D截面上,分别计算梁内产生的拉应力。



5-45 题解图

如图,荷载在B截面时产生正弯矩,最大拉应力产生在B截面下边缘点上

$$\sigma_1 = \frac{2P \times y_c}{I_x}$$

荷载在D截面时产生负弯矩,最大拉应力产生在C截面上边缘点上

$$\sigma_1 = \frac{3P \times \frac{y_c}{2}}{I_x} = \frac{1.5Py_c}{I_x}$$

所以荷载移动到B截面时梁内的拉应力最大。

故应选答案(B)。

5-46 (B) 5-47 (D) 5-48 (D)

5-49 (B)。解题思路:如图,梁挠曲线上的拐点产生在弯矩为零的截面。据此可作出弯矩图。

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{L/3}{2L/3}$$

所以 $m_2 = 2m_1$

故应选答案(B)。

5-50 (C) 5-51 (D)

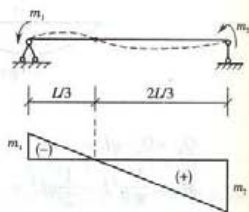
5-52 (D)。解题思路:如图,本题的梁为一次超静定梁。解除B支座链杆约束,以约束反力 R_B 代替,则该梁在外力偶 m 和反力 R_B 作用下,B处挠度应该为零。

$$f_B = \frac{mL^2}{2EI} + \frac{R_B L^3}{3EI} = 0$$

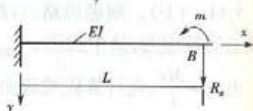
$$R_B = \frac{3}{2} \frac{m}{L} (\downarrow)$$

故应选答案(D)。

5-53 (D)



5-49 题解图



5-52 题解图

5-54 (C) 5-55 (C) 5-56 (D)

5-57 (D)。解题思路:取弹性块体中一点的应力单元体如图所示。

前后面为自由面,应力为零。

由广义胡克定律,得

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E} [\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)]$$

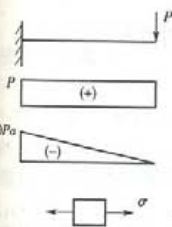
$$\varepsilon_x = \frac{1}{E} [\sigma_x - \nu(-q)] = 0$$

$$\sigma_x = -\nu q$$

故应选答案(D)。

5-58 (C)

5-59 (B)。解题思路:由梁的剪力、弯矩图可知,梁各截面剪力相同,中性层上剪应力最



5-59 题解图

$$\tau = \frac{3Q}{2A} = \frac{3}{2} \times \frac{P}{2a^2} = \frac{3P}{4a^2}$$

固端截面,弯矩最大,上、下边缘点为危险点,应力单元体如图。

$$\sigma = \frac{M}{W_x} = \frac{10Pa}{\frac{a(2a)^2}{6}} = 15 \frac{P}{a^2}$$

该点的最大剪应力产生在上 45°斜面上。

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma}{2} = 7.5 \frac{P}{a^2}$$

故应选答案(B)。

5-60 (B)。解题思路:该点为三向应力状态,已知一个主应力 10 MPa,为此取垂直于该主平面的投影,得图示纯剪应力状态,其主应力单元体如图所示。

按代数值排列主应力

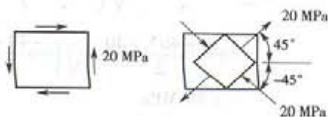
$$\sigma_1 = 20 \text{ MPa}$$

$$\sigma_2 = 10 \text{ MPa}$$

$$\sigma_3 = 20 \text{ MPa}$$

所以 $\sigma_{\max} = \sigma_1 = 20 \text{ MPa}$

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} = \frac{20 - (-20)}{2} = 20 \text{ MPa}$$



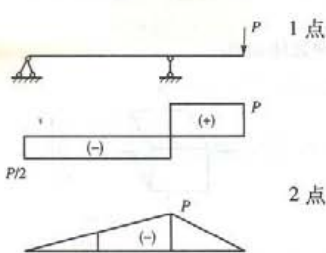
5-60 题解图

故应选答案(B)。

5-61 (C)。解题思路:先确定各点的三个主应力,再计算各点的第三强度理论的相当应力。

应选答案(C)。

5-62 (D)。解题思路:由 Q 、 M 图可知,1、2、3 点所在截面剪力为 $-\frac{P}{2}$,弯矩为 $-\frac{1}{2}P$,所



5-62 题解图

$$\sigma = \frac{M}{W_z} = \frac{P/2}{\frac{a^3}{6}} = 50 \text{ MPa}$$

$$\frac{1}{2}P = 50 \times 10^6 \times \frac{160^2}{6} \times 10^{-9}$$

$$\tau = \frac{3}{2} \frac{Q}{a^2} = \frac{3}{2} \frac{P}{a^2}$$

$$= \frac{3}{2} \times \frac{50 \times 10^6 \times \frac{160^2}{6} \times 10^{-9}}{160^2 \times 10^{-6}} = 2 \text{ MPa}$$

3 点 $\sigma = -50 \text{ MPa}$

4 点 $\tau = \frac{3}{2} \frac{Q}{a^2} = \frac{3}{2} \frac{P}{a^2} = 4 \text{ MPa}$

故应选答案(D)。

5-63 (A)。解题思路:对两单元体分别计算第三强度理论的相当应力

$$(a) \sigma_{\text{eq}} = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} = \sqrt{5}\sigma$$

$$(b) \sigma_1 = \sigma, \sigma_2 = \tau = \sigma, \sigma_3 = -\tau = -\sigma$$

$$\sigma_{\text{eq}} = \sigma_1 - \sigma_3 = 2\sigma$$

故应选答案(A)。

5-64 (D)

5-65 (B)。解题思路:第三强度理论是最大剪应力理论,破坏面应是最大剪应力所在平面。而最大剪应力 τ_{max} 作用平面与 σ_2 方向平行,且与 σ_1, σ_3 作用平面分别夹 45° 。

故应选答案(B)。

5-66 (D)。解题思路:用解析法求

$$\begin{aligned} \sigma_{\text{max}} &= \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \\ &= \frac{(-40) + 40}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{-40 - 40}{2}\right)^2 + (40\sqrt{3})^2} \\ &= \pm 80 \text{ MPa} \end{aligned}$$

所以 $\sigma_1 = 80 \text{ MPa}, \sigma_2 = 0, \sigma_3 = -80 \text{ MPa}$

$$\tan 2\alpha_0 = \frac{-\tau_{xy}}{\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}} = \frac{-(-40\sqrt{3})}{\frac{-40 - 40}{2}} = \frac{40\sqrt{3}}{-40}$$

分子为正,分母为负, $2\alpha_0$ 应在第二象限取值。

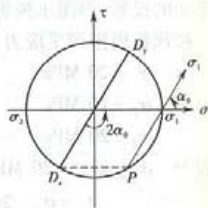
$2\alpha_0 = 120^\circ$, 所以 $\alpha_0 = 60^\circ$ (对应主应力 σ_1 方位角)

用应力圆法求解,如图示,较解析法简捷。

故应选答案(D)。

5-67 (C) 5-68 (A) 5-69 (C) 5-70 (A) 5-71 (D)

5-72 (D)。解题思路:先求斜杆的支反力,并作出内力图如图示。



5-66 题解图

$$R_{Ax} = P \cos 30^\circ = 2\sqrt{3} \text{ kN}$$

$$R_{Ay} = R_B = \frac{1}{2} P \sin 30^\circ \\ = 1 \text{ kN}$$

$$C \text{ 截面上内力 } N = -2\sqrt{3} \text{ kN}$$

$$M = 1 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

C 截面上边缘点压应力

$$\sigma = \frac{N}{A} + \frac{M}{W} \\ = \frac{2\sqrt{3} \times 10^3}{(100 \times 100) \times 10^{-6}} \\ + \frac{1 \times 10^3}{\frac{1}{6} (100)^3 \times 10^{-9}}$$

$$= 0.346 + 6 = 6.346 \text{ MPa}$$

故应选答案(D)。

5-73 (A)

5-74 (B)。解题思路:一端自由,另一端固定压杆的长度数为2;一端铰支,另一端固定压杆的长度系数为0.7。因为弹性支承其刚度大于自由端而小于铰支承,所以一端弹性支承,另一端固定压杆的长度系数介于(一端自由,另一端固定)与(一端铰支,另一端固定)之间,为 $0.7 < \mu < 2$ 。

故应选答案(B)。

5-75 (C) 5-76 (C) 5-77 (B) 5-78 (D)

5-79 (C)。解题思路:压杆失稳时横截面绕惯性矩最小的 y_0 轴转动。注意到等角钢 $I_x = I_y$ 。

$$I_{y_0} = I_x + I_y - I_{ab} = 2m - n$$

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 E (2m - n)}{(2L)^2}$$

故应选答案(C)。

5-80 (A)。解题思路:三杆轴力均达临界力时,D点的作用力P达到临界值。

细长杆用欧拉公式计算临界力

$$AD, BC \text{ 杆 } N_{cr1} = \frac{\pi^2 EI}{(L/\cos 30^\circ)^2}$$

$$BD \text{ 杆 } N_{cr2} = \frac{\pi^2 EI}{(0.7L)^2}$$

$$P_{cr} = 2N_{cr} \cos 30^\circ + N_{cr2} = 3.34 \frac{\pi^2 EI}{L^2}$$

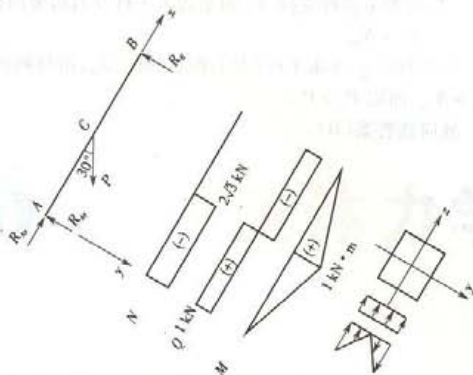
应选答案(A)。

5-81 (C)

5-82 (B)。解题思路:

(1) 桁架中斜杆受压, P_1 由斜杆临界力确定, 即

$$P_1 = N_{cr1} \cdot \sin 45^\circ$$



5-72 题解图

(2) 桁架中斜杆受拉, P_2 由上边水平杆及右边竖向杆承压的临界力确定, 即

$$P_2 = N_{cr2}$$

由于斜杆 $\lambda_1 >$ 水平杆(及右加竖向杆) λ_2 , 由材料的临界应力总图可知: $\sigma_{cr1} < \sigma_{cr2}$ 。因而 $N_{cr2} > N_{cr1}$, 所以 $P_2 > P_1$ 。

故应选答案(B)。

6 流体力学

考试大纲

6.1 流体的主要物性与流体静力学

流体的压缩性与膨胀性;流体的黏性与牛顿内摩擦定律;液体静压强及其特性;重力作用下静水压强的分布规律;作用于平面的液体总压力的计算。

6.2 流体动力学基础

以流场为对象描述流动的概念;流体运动的总流分析;恒定总流连续性方程、能量方程和动量方程的运用。

6.3 流动阻力和能量损失

沿程阻力损失和局部阻力损失;实际流体的两种流态——层流和紊流;圆管中层流运动;紊流运动的特征;减小阻力的措施。

6.4 孔口、管嘴、管道流动

孔口自由出流、孔口淹没出流;管嘴出流;有压管道恒定流;管道的串联和并联。

6.5 明渠恒定流

明渠均匀水流特性;产生均匀流的条件;明渠恒定非均匀流的流动状态;明渠恒定均匀流的水力计算。

6.6 渗流、井和集水廊道

土壤的渗流特性;达西定律;井和集水廊道。

6.7 相似原理和量纲分析

力学相似原理;相似准数;量纲分析法。

复习指导

1. 复习的重点、难点

流体力学是一门传统的力学技术基础课,根据学科的特点和考试大纲的要求,可将其分为基础理论、工程应用和实验技术三大部分。其中基础理论部分应重点掌握流体静压强、静止液体作用在平面上的总压力等的计算,恒定总流的连续性方程、能量方程和动量方程,流动阻力

及水头损失的计算等,恒定总流的三大基本方程是流体力学的核心,流动阻力及水头损失计算是学习的难点;工程应用部分应重点掌握孔口、管嘴出流及有压管流的水力计算,明渠均匀流水力计算,集水廊道和井的水力计算等;实验技术部分应重点掌握实验分析理论(相似原理和量纲分析)。

2. 复习时应注意的问题

流体力学同其他力学一样,特点是概念多,因此复习时应加深对有关概念的理解。其中关于基本定义方面的概念如密度、黏性、压缩性、流线、雷诺数等,要在理解的基础上加以记忆;关于流动分类的概念,如恒定流与非恒定流、均匀流与非均匀流、渐变流与急变流、层流与紊流、有压流与无压流、渗流等,要注意其区别;关于流体模型方面的概念,如流体的连续介质模型、理想流体模型、不可压缩流体模型、渗流模型等,主要理解有关模型的含义即可。另外,在应用基本方程解题时,要特别注意方程的应用条件、各项的意义,并掌握有关水流特点、计算步骤和计算要点。

3. 考试的解题技巧

流体力学是一门难度较大的学科,但对勘察设计类注册工程师考试的要求不高。考题均为设有四个备选答案的单项选择题,其题型一般分为基本概念类、比较选择类、识记类、因果类和计算类多种。其中计算类通常占60%左右,但计算量限于时间一般不大,且基本上为难度不大的基础性题目。备选答案一般具有迷惑性,因此解题时一定要认真审题。对于需要计算出结果的,则应注意计算单位的统一;对于只需给出定性分析结果的,则应准确掌握因果关系,逐项推导,找出正确答案。另外在解题过程中,对部分难以找到正确答案的题目,可采用排除法寻找答案的范围,可能无需计算即可确定正确答案,从而节省时间。

复习内容

6.1 流体的主要物性与流体静力学

要求:了解流体的基本特征;理解流体的主要物理性质;理解作用在流体上的力;理解流体静压强的基本概念;掌握流体静力学基本方程;掌握静止液体作用在平面和曲面上的总压力计算。

6.1.1 流体的连续介质模型

流体力学的研究对象是流体。流体是自然界易流动的物质的总称,它包括液体和气体。液体具有一定的体积并可形成自由表面,而气体则没有固定的体积,但能充满整个容器。从力学分析看,液体和气体几乎不能承受拉力,在静止状态下还不能承受剪力,即在微小剪力作用下将产生连续不断的变形。在承受压力时,气体容易被压缩,而液体则难于被压缩。

流体是由大量不断地作无规则热运动的分子所组成,而分子之间又存有空隙。因此,从微观的角度看,流体的物理量在时间和空间上的分布都是不连续的。但是,在标准状况下,1 cm³液体中约含有 3.3×10^{23} 个分子,1 cm³气体中约含有 2.7×10^{19} 个分子。也就是说,工程问题中的任何一个宏观体积所包含的分子数目都是非常多的。流体力学是一门宏观力学,所关注的是流体的宏观特性即大量分子运动的统计平均特性。因此,研究中通常引入连续介质模型,即认为流体是由连续分布的流体质点所组成。将流体视为连续介质后,流体运动中的物理量均可视为空间和时间的连续函数,这样就可利用数学中的连续函数方法来对流体运动进行研

究。

6.1.2 流体的密度

流体单位体积内所具有的质量称为密度,以符号 ρ 表示。对于均质流体,若体积为 V 的流体具有质量 m ,则

$$\rho = \frac{m}{V} \quad (6.1-1)$$

式中密度的单位为 kg/m^3 。

流体的密度一般取决于流体的种类、压强和温度。对于液体,密度随压强和温度的变化很小,一般视为常数,如在工程计算中,通常取淡水的密度为 $1\,000\text{ kg}/\text{m}^3$,水银的密度为 $13\,600\text{ kg}/\text{m}^3$ 。

6.1.3 流体的黏性

流体处于静止时不能抵抗剪切变形,但当两层流体之间有相对运动时,在其接触面上就会产生抵抗流体相对运动的内摩擦力:运动快的流层对运动慢的流层产生拉力,运动慢的流层对运动快的流层产生阻力。流体具有内摩擦力的特性即为流体的黏性,或者说黏性即为运动流体具有抵抗剪切变形的能力。由于流体的黏性,流体在运动过程中必须为克服内摩擦力而做功,从而导致能量损失。因此,黏性是运动流体产生机械能损失的根源。

根据牛顿内摩擦定律,任意两薄层间流体的切应力

$$\tau = \mu \frac{du}{dy} \quad (6.1-2)$$

式中: μ 为黏度(也称黏性系数)或动力黏度,单位为 $\text{Pa} \cdot \text{s}$; du 、 dy 分别为两薄层间的流速差和距离(见图6.1-1); $\frac{du}{dy}$ 为流速梯度,即流速沿垂直于流速方向的变化率,实质上它代表流体微团的剪切变形速率。

黏度 μ 反映了流体黏性的大小, μ 值越大,流体抵抗剪切变形的能力就越大。黏性主要与流体的种类和温度有关,压强的影响较小。液体的 μ 值随温度的升高而减小,气体的 μ 值随温度的升高而增大。流体的黏性也可用运动黏度表示,即

$$\nu = \frac{\mu}{\rho} \quad (6.1-3)$$

式中 ν 的单位为 m^2/s 或 cm^2/s 。水的运动黏度可用下列经验公式计算:

$$\nu = \frac{0.017\,75}{1 + 0.033\,7t + 0.000\,221t^2} \text{ cm}^2/\text{s} \quad (6.1-4)$$

式中 t 为水温,以 $^{\circ}\text{C}$ 计。

牛顿内摩擦定律仅适用于在温度不变条件下,动力黏度 μ 等于常数的一类流体,如水、空气、酒精等。通常把符合牛顿内摩擦定律的流体称为牛顿流体,否则称为非牛顿流体。本章只讨论牛顿流体。

实际流体都是有黏性的,黏性是流体的固有属性,但考虑流体的黏性,将使流体运动的分析变得非常复杂。在流体力学中,为了简化理论分析,通常引入不考虑黏性的“理想流体模

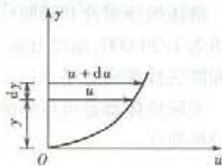


图 6.1-1

型”,关于黏性的影响则在得出结论后再考虑加以修正解决。

6.1.4 流体的压缩性和膨胀性

1. 物体的压缩性

在一定温度下,液体的宏观体积随作用压强的增大而减小的性质,称为流体的压缩性。压缩性的大小可用体积压缩系数

$$k = -\frac{dV/V}{dp} \quad (6.1-5)$$

或体积弹性模量

$$K = \frac{1}{k} = -\frac{dp}{dV/V} \quad (6.1-6)$$

量度。式中 dV/V 为相应于压强增量 dp 的体积变化率,因 dp 与 dV 恒异号,故上面式中加一负号,以使 k 或 K 为正值。因质量 $m = \rho V$,所以体积变化率 dV/V 也可用密度变化率 $d\rho/\rho$ 表示,即 $dV/V = -d\rho/\rho$ 。 k 的单位为 m^2/N , K 的单位为 N/m^2 。流体的 k 或 K 一般与流体的种类、温度和压强等有关。

2. 流体的膨胀性

在一定压强下,流体的宏观体积随着温度的增加而增加的性质,称为流体的膨胀性。膨胀性可用体积膨胀系数

$$\alpha_v = \frac{dV/V}{dT} \quad (6.1-7)$$

量度。 α_v 的单位为温度单位的倒数。

液体的压缩性和膨胀性一般都很小。如在常温常压下,每增加 1 个大气压,水的体积压缩率约为 $1/20\,000$,温度升高 1°C ,水的体积膨胀率约为 $1.5/10\,000$ 。故一般情况下,水的压缩性和膨胀性都可忽略不计。

实际流体都是可压缩的,但在可以忽略流体压缩性时,引出“不可压缩流体模型”,可使流动分析简化。

6.1.5 作用在流体上的力

为了便于研究流体平衡和运动的规律,可将作用在流体上的力分为表面力和质量力两大类。

表面力作用在流体隔离体表面上,其大小与作用面积成比例。根据作用力的方向,表面力又可分为垂直于作用面的压力和平行于作用面的切力两种。

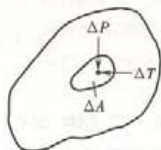


图 6.1-2

设在流体隔离体表面上任一点取微小面积 ΔA (见图 6.1-2),作用在 ΔA 上的压力和切力分别为 ΔP 和 ΔT ,则该点的压强 p 和切应力 τ 分别为

$$p = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta P}{\Delta A} \quad (6.1-8)$$

$$\tau = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta T}{\Delta A} \quad (6.1-9)$$

p 及 τ 的单位为 N/m^2 或 Pa 。

质量力作用在流体隔离体内每个流体微团上,其大小与流体质量成比例。常见的质量力

有重力、惯性力。单位质量流体上所受到的质量力称为单位质量力。设质量为 m 的流体所受到的总质量力为 F , 则单位质量力为

$$f = \frac{F}{m} = Xi + Yj + Zk \quad (6.1-10)$$

式中 $X = \frac{F_x}{m}$, $Y = \frac{F_y}{m}$, $Z = \frac{F_z}{m}$ 分别为单位质量力 f 在各坐标轴上的分量。单位质量力的单位为 m/s^2 , 与加速度的单位相同。

6.1.6 流体静压强及其特性

1. 流体静压强的定义

在静止流体中, 围绕某点取一微小面积 ΔA , 如图 6.1-3 所示, 作用在该面积上的压力为 ΔP , 则当 ΔA 趋近于零时, 平均压强 $\frac{\Delta P}{\Delta A}$ 的极限值即为该点的流体静压强, 用符号 p 表示, 即

$$p = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta P}{\Delta A}$$

其单位为 N/m^2 或 Pa 。

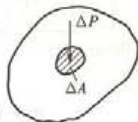


图 6.1-3

2. 流体静压强的特性

① 流体静压强垂直指向作用面, 即流体静压强的方向与作用面的内法线方向相同。

② 静止流体中任一点的静压强与作用面的方位无关。现简要证明如下。

设在静止流体中任意方位任取一微小三棱体, 如图 6.1-4(a) 所示, 其边长分别为 da , db , dc , 厚度 (垂直于纸面) 为 dl , 体积为 dV , 作用在三个微小面积上的压强分别为 p_1 , p_2 , p_3 , 则作用在三棱体上的表面力分别为

$$P_1 = p_1 da dl, P_2 = p_2 db dl, P_3 = p_3 dc dl$$

质量力只有重力: $dG = \rho g dV$ 。

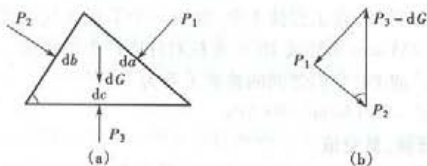


图 6.1-4

因三棱体在 P_1 , P_2 , P_3 , dG 作用下平衡, 根据理论力学, 必然组成一闭合三角形, 如图 6.1-4(b) 所示。根据几何学, 这两个三角形为相似三角形, 其对应边应成比例, 即

$$\frac{P_1}{da} = \frac{P_2}{db} = \frac{P_3 - dG}{dc}$$

当 da , db , dc , dl 趋近于零时, 三棱体收缩至一点, 相应地 dV 也趋近于零, 于是得到

$$p_1 = p_2 = p_3$$

即静止流体中任一点的静压强大小与通过该点的作用面的方位无关。至于不同空间点的流体静压强, 一般来说是各不相同的, 即流体静压强是空间坐标的连续函数:

$$p = p(x, y, z)$$

(6.1-11)

6.1.7 重力作用下流体静压强的分布规律

1. 流体静力学基本方程

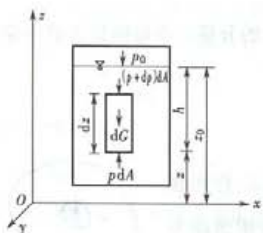


图 6.1-5

在静止流体中取一底面积为 dA 、高为 dz 的竖直棱柱形隔离体,如图 6.1-5 所示。在重力作用下,水平方向因表面力大小相等,方向相反,互相抵消。在铅垂方向,作用在底面的压力为 $p dA$,方向向上;顶面的压力为 $(p + dp) dA$,方向向下;质量力只有重力, $dG = \rho g dA dz$,方向向下。因隔离体在各力作用下平衡,故有

$$p dA - (p + dp) dA - \rho g dA dz = 0$$

化简上式得重力作用下流体静压强微分方程

$$dp = -\rho g dz \quad (6.1-12)$$

对于不可压缩流体, ρ 等于常数,积分上式得

$$p = -\rho g z + C \quad (6.1-13)$$

将定解条件 $z = z_0$ 时, $p = p_0$ 代入上式,求得积分常数 $C = p_0 + \rho g z_0$ 。于是得流体静力学基本方程

$$p = p_0 + \rho g (z_0 - z) = p_0 + \rho g h \quad (6.1-14)$$

式中: $h = z_0 - z$ 为从液面算起的淹没深度; g 为重力加速度,在流体力学中,一般取 $g = 9.80 \text{ m/s}^2$ 。

从式 6.1-14 可知:①表面压强 p_0 将等值地传递到流体中的各点,这就是著名的压强传递的帕斯卡定律;②在重力作用下的静止均质流体中,液面下深度 h 相等各点的压强相等。压强相等各点组成的面称为等压面,故重力作用下的静止均质流体的等压面为水平面;③对于气体,因密度值较小(约为水的 $\frac{1}{800}$),当 h 不大时,任意两点的静压强可以认为是相等的。

通常建筑物表面和自由液面上都作用着当地大气压强 p_a 。当地大气压强值一般随海拔高度和气温变化。为便于计算,在工程技术中,常用一个工程大气压强(at)表示当地压强值。一个工程大气压相当于 735 mm 汞柱或 10 m 水柱对柱底产生的压强。我国法定计量单位中,压强的单位规定为 N/m^2 或 Pa,它们之间的换算关系为

$$1 \text{ at} = 1 \text{ kgf/cm}^2 = 98 \text{ kN/m}^2 = 98 \text{ kPa}$$

2. 绝对压强、相对压强、真空值

以绝对真空为零点计算的压强称为绝对压强,用 p' 表示;以当地大气压强 p_a 为零点计算的压强为相对压强,用 p 表示。在实际工程中,建筑物表面和自由液面多为大气压强 p_a 作用,故对建筑物起作用的压强仅为相对压强。

绝对压强和相对压强之间相差一个当地大气压强 p_a ,即

$$p = p' - p_a \quad (6.1-15)$$

绝对压强 p' 总为正值,而相对压强 p 则可正可负。如果流体内某点的绝对压强小于当地大气压,其相对压强为负值,则称该点存在真空。真空的大小习惯以真空值

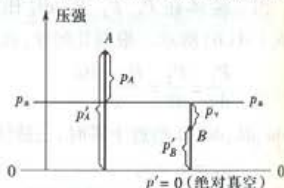


图 6.1-6

$$p_v = p_a - p'$$

(6.1-16)

或真空度 $\frac{p_v}{\rho g}$ 表示。真空值 p_v 总为正值。

绝对压强、相对压强和真空值三者的关系如图 6.1-6 所示。

【例 6.1-1】图 6.1-7 所示封闭容器的水面绝对压强 $p'_0 = 85 \text{ kPa}$ ，中央玻璃管两端开口，试求玻璃管应伸入水面以下若干深度时，既无空气通过玻璃管进入容器，又无水进入玻璃管。

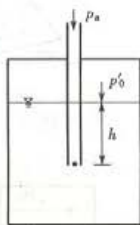


图 6.1-7

解：将式 6.1-14 用于玻璃管底部一点，有

$$p_a = p'_0 + \rho gh$$

$$\text{则 } h = \frac{p_a - p'_0}{\rho g} = \frac{98\,000 - 85\,000}{1\,000 \times 9.80} = 1.327 \text{ m}$$

为避免出错，计算时应注意式中各项单位的统一。

【例 6.1-2】已知安装在图 6.1-8 所示封闭水箱上的金属测压计读数 $p_R = 4\,900 \text{ Pa}$ ，金属测压计中心、液面分别比 A 点高 $h_1 = 0.5 \text{ m}$ 和 $h_2 = 1.5 \text{ m}$ ，试求液面的相对压强和绝对压强。

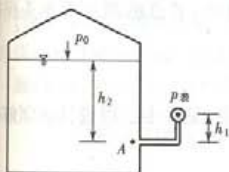


图 6.1-8

解：将式 6.1-14 用于 A 点，有

$$p_A = p_R + \rho gh_1 = p_0 + \rho gh_2$$

则液面的相对压强为

$$\begin{aligned} p_0 &= p_R + \rho g(h_1 - h_2) \\ &= 4\,900 + 1\,000 \times 9.80 \times (0.5 - 1.5) \\ &= -4\,900 \text{ Pa} \end{aligned}$$

由于 $p_0 < 0$ ，说明液面存在真空，其真空值为

$$p_v = p_a - p' = -p_0 = 4\,900 \text{ Pa}$$

液面的绝对压强为

$$p'_0 = p_0 + p_a = -4\,900 + 98\,000 = 93\,100 \text{ Pa}$$

注意：金属测压计读值为相对压强值，为什么？请读者思考。

3. 流体静压强分布图

实际工程中，常用流体静压强分布图来分析问题和进行计算。绘制流体静压强分布图所用知识点有流体静力学基本方程和流体静压强的两个特性。因 p 与 h 呈线性关系，故只需任取两对 (p, h) ，连成一直线，即可绘出。图 6.1-9 为几种壁面上的相对压强分布图，其中矢线的长短表示压强的大小，箭头方向即为压强的方向，垂直于受压面。

4. 位置水头、压强水头、测压管水头

由式 6.1-13 可得流体静力学基本方程的另一形式

$$z + \frac{p}{\rho g} = C \quad (6.1-17)$$

上式说明，在连续均质的静止流体中，各点的 $z + \frac{p}{\rho g}$ 等于常数。

现说明式 6.1-17 各项的几何意义。如图 6.1-10 所示盛水封闭容器，若在容器壁上任意点

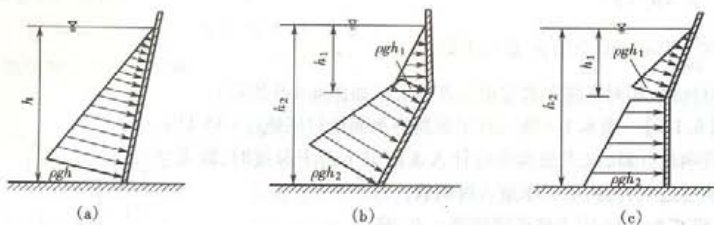


图 6.1-9

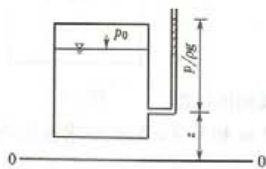


图 6.1-10

接上开口玻璃管(称为测压管),则测压管内液面离基准面的高度系由位置高度 z 和压强高度 $\frac{P}{\rho g}$ 两部分组成。在流体力学中,通常用“水头”代表高度,故 z 称为位置水头, $\frac{P}{\rho g}$ 称为压强水头(也称为测压管高度),而 $z + \frac{P}{\rho g}$ 则称为测压管水头。在均质连续的静止流体中,各点的测压管水头保持

不变。

6.1.8 静止液体作用在平面上的总压力

静止液体作用在平面上的总压力的大小、方向和作用点的确定,是许多工程设计必须解决的流体力学问题。

1. 总压力的大小

设在静止液体中有一与水平面交角为 α 、面积为 A 的平面 ab ,如图 6.1-11 所示,平面 ab 左侧承受液体压力,右侧及液面均作用着大气压强 p_0 。为分析方便,将平面 ab 绕 Oy 轴旋转 90° ,建立图示 xOy 坐标系。

在平面 ab 上任取一微小面积 dA ,其中心位于液面以下的深度为 h ,则作用在微小面积上的液体总压力为 $dP = \rho gh dA = \rho g y \sin \alpha dA$,因作用在平面 ab 各微小面积上的 dP 方向相同,根据平行力系求和原理,将 dP 沿受压面积分,可得作用在受压面上的总压力

$$P = \int_A dP = \rho g \sin \alpha \int_A y dA$$

式中 $\int_A y dA$ 为受压面积对 x 轴的静矩,据理论力学知,

它等于受压面积 A 与其形心坐标 y_c 的乘积。因此

$$P = \rho g \sin \alpha \cdot y_c A = \rho g h_c A = p_c A$$

式中 h_c 、 p_c 分别为受压曲面形心处的淹深和相对压强。

2. 总压力的方向

总压力 P 的方向,与 dP 方向相同,即沿受压面内法线方向。

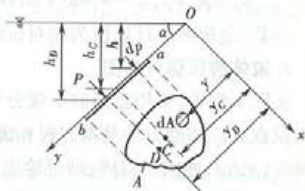


图 6.1-11

(6.1-18)

3. 总压力的作用点

总压力 P 的作用点(也称压力中心)位置,可用理论力学中的合力矩定理求得。对 x 轴有

$$P \cdot y_D = \int_A y \cdot dP$$

将 $P = \rho g \sin \alpha \cdot y_c A$ 和 $dP = \rho g y \sin \alpha dA$ 代入,化简得

$$y_D = \frac{\int_A y^2 dA}{y_c A}$$

式中 $\int_A y^2 dA = I_x$ 为受压面对 x 轴的惯性矩,为使用上的方便,可根据惯性矩平行移轴公式 $I_x = I_c + y_c^2 A$ 将其换算成受压面对通过其形心 C 且平行于 x 轴的轴线的惯性矩 I_c ,于是得压力中心基本公式

$$y_D = y_c + \frac{I_c}{y_c A} \quad (6.1-19)$$

因 $\frac{I_c}{y_c A}$ 恒大于零,故 $y_D > y_c$,即压力中心 D 总是在受压面形心 C 的下方。注意,应用式 6.1-19 时,坐标原点必须放在自由液面上。

【例 6.1-3】图 6.1-12 所示为一宽 b 、高 h 的铅直矩形平板闸门,试求作用在闸门上的静水总压力和作用点位置,并说明图算法原理。

解:总压力由式 6.1-18 得

$$P = \rho g h_c A = \rho g \frac{h}{2} hb = \frac{1}{2} \rho g h^2 b = A_p b$$

式中 $A_p = \frac{1}{2} \rho g h^2$ 为压强分布图面积。由此可见,静止液体作用在矩形平面上的总压力恰等于以压强分布图面积为底、以平面宽度为高的体积。

作用点位置由式 6.1-19 得

$$y_D = y_c + \frac{I_c}{y_c A} = \frac{h}{2} + \frac{\frac{1}{12} bh^3}{\frac{h}{2} \cdot hb} = \frac{2}{3} h$$

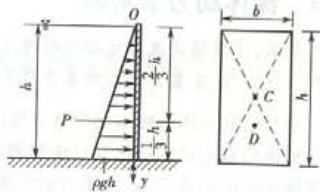


图 6.1-12

恰位于通过压强分布图体积形心引出的合力作用线与受压面的交点。

图算法仅适用于受压面为矩形的情况。

【例 6.1-4】图 6.1-13 为绕铰链 O 转动的自动开启式矩形闸门,倾角 $\alpha = 60^\circ$,要求 $h_1 = 2.0 \text{ m}$, $h_2 = 0.4 \text{ m}$ 时,闸门自动开启。试求铰链至水闸下端的距离 x_0 。

解:确定闸门承受的静水总压力及作用点位置。设闸门宽度为 b ,则

$$P_H = \rho g \frac{h_1}{2} \cdot b \cdot \frac{h_1}{\sin \alpha} = 226 \text{ 32b N}$$

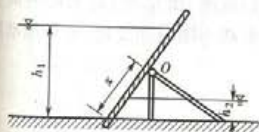


图 6.1-13

作用点离水闸下端: $l_x = \frac{h_1}{3\sin\alpha} = 0.77 \text{ m}$

$$P_{f_1} = \rho g \frac{h_2}{2} \cdot b \frac{h_2}{\sin\alpha} = 905.3b \text{ N}$$

作用点离水闸下端: $l_{f_1} = \frac{h_2}{3\sin\alpha} = 0.15 \text{ m}$

要使闸门自动开启,则必有

$$P_x(x - l_x) \leq P_{f_1}(x - l_{f_1})$$

将 P_x 、 l_x 、 P_{f_1} 、 l_{f_1} 代入上式,得 $x \leq 0.8 \text{ m}$ 。

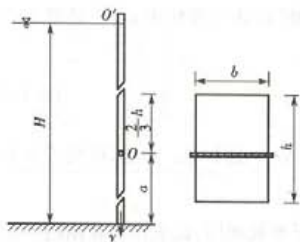


图 6.1-14

$$H > a + \frac{14}{15}h$$

【例 6.1-5】如图 6.1-14 所示矩形闸门,已知 a 及 h ,试求 H 为多少时,闸门可绕转轴 O 自动打开。

解:本题解法有多种,下面介绍一种较为简单的解法。要使闸门自动打开,则必有

$$y_D = y_C + \frac{I_C}{y_C A} < H - a$$

即作用在闸门上的静水总压力的作用点必须位于转轴上方。将 $y_C = H - a - \frac{1}{10}h$, $I_C = \frac{1}{12}bh^3$, $A = bh$ 代入上式,化简即得

6.2 流体动力学基础

要求:了解描述流体运动的两种方法;理解欧拉法研究流体运动的基本概念;掌握恒定总流的连续方程、能量方程和动量方程及其应用。

本节研究流体机械运动的基本规律及其在工程中的初步应用。研究流体运动的方法有着眼于流体质点运动的拉格朗日法和着眼于流场(即充满运动流体质点的空间)的欧拉法。由于流体运动的复杂性,在流体力学中通常采用较为简便的欧拉法,即流场分析法。

6.2.1 研究流体运动的基本概念

1. 恒定流与非恒定流

根据流场中各运动要素(即表征流体运动状态的物理量,如流速、流量等)是否随时间变化,可将流体流动分为恒定流和非恒定流。若流场中各运动要素都不随时间变化,这种流动称为恒定流,否则称为非恒定流。

2. 流线与迹线

迹线是流体质点运动的轨迹线,而流线则是某时刻在流场中画出的一条空间曲线,在该时刻,曲线上所有质点的流速矢量均与这条空间曲线相切,如图 6.2-1 所示。流线和迹线是两个完全不同的概念。流线是同一时刻与许多质点的流速矢量相切的空间曲线,而迹线则

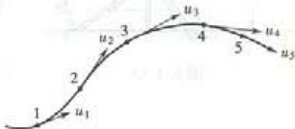


图 6.2-1

是同一质点在一个时段内运动的轨迹线。前者是欧拉法分析流体运动的概念,时间是参变量;后者则是拉格朗日法研究流体运动的概念,时间是变量。

恒定流时,流线的形状、位置均不随时间变化,且与迹线重合。一般情况下,流线不能相交,且只能是一条光滑曲线。否则,在交点或非光滑处存在两个切线方向,这意味着在同一时刻,同一质点具有两个运动方向,这显然是不可能的。

流体的方程可以根据流线的定义得到。设流线上任一点的流速矢量 $u = u_x i + u_y j + u_z k$, 流线上的微元线段矢量为 $ds = dx i + dy j + dz k$, 则据流线的定义可得流线微分方程

$$u \times ds = 0 \quad (6.2-1)$$

$$\text{或} \quad \frac{dx}{u_x} = \frac{dy}{u_y} = \frac{dz}{u_z} \quad (6.2-1a)$$

3. 流管、元流、总流和过流断面

在流场中通过任意不与流线重合的封闭曲线上各点作流线而构成的管状表面称为流管(见图 6.2-2(a))。由于流线不能相交,所以各个时刻流体质点只能在流管内部或表面流动,而不能穿越流管。也就是说,流管仿佛就是一根实际的管道,其周界可视为固壁一样。流管内所有流线的总和称为流束(见图 6.2-2(b))。流束可小可大,如果封闭曲线取得无限小,所得流束称为微小流束,也称元流;如果封闭曲线取在流场周界上,所得流束称为总流,总流为无数元流的有限集合体。

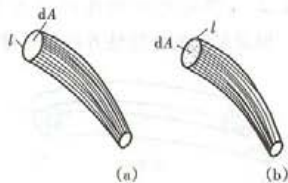


图 6.2-2

与元流或总流的流线正交的截面为过流断面。过流断面的形状随流线的形状而定,可能是平面或曲面。

4. 流量与断面平均流速

单位时间内通过过流断面的流体量称为流量。流体量一般可用体积或质量度量,故流量可相应地分为体积流量 Q (m^3/s 或 L/s) 和质量流量 Q_m (kg/s)。在流体力学中,常用体积流量。

设元流过流断面上各点流速为 u , 根据流量定义,可得元流的流量为 $dQ = u dA$ 。通过总流过流断面的流量等于所有元流的流量之和,即

$$Q = \int_A dQ = \int_A u dA \quad (6.2-2)$$

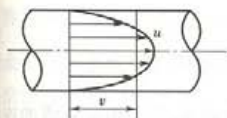


图 6.2-3

总流过流断面上实际流速分布是不均匀的,如图 6.2-3 所示。工程中为使研究简便,通常引入断面平均流速的概念。所谓断面平均流速,是指假想均匀分布在过流断面上的流速 v , 其大小等于流经过流断面的流量 Q 除以过流断面面积 A , 即

$$v = \frac{Q}{A} = \frac{\int_A u dA}{A} \quad (6.2-3)$$

5. 均匀流与非均匀流 渐变流

根据位于同一流线上各质点的流速矢量是否沿程变化,可将流体流动分为均匀流和非均匀流两种。若流场中同一流线上各质点的流速矢量沿程不变,这种流动称为均匀流,否则称为

非均匀流。均匀流中各流线是彼此平行的直线,过流断面上的流速分布沿程不变,过流断面为平面。

实际工程中的流体流动大多为流线彼此不平行的非均匀流。为便于研究,常常按流线沿程变化的缓急程度,又将非均匀流分为渐变流和急变流。其中渐变流是流体力学的一个重要概念。渐变流是指各流线接近于平行直线的流动,其极限情况就是流线为平行直线的均匀流。

渐变流过流断面具有下面的两个重要性质:

① 渐变流过流断面近似为平面;

② 恒定渐变流过流断面上流体动压强近似地按静压强分布,即同一过流断面 $z + \frac{p}{\rho g}$ 近似为常数。

6.2.2 恒定总流的连续性方程

恒定总流的连续性方程是质量守恒定律在流体力学中的数学表达式。

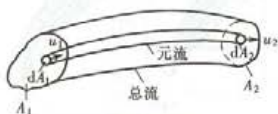


图 6.2-4

在图 6.2-4 所示总流中任取一束元流,其进出口过流断面的面积分别为 dA_1 和 dA_2 ,流速分别为 u_1 和 u_2 。根据质量守恒定律,在恒定条件下,单位时间流进 dA_1 的质量等于流出 dA_2 的质量,即 $\rho_1 u_1 dA_1 = \rho_2 u_2 dA_2$ 。对于不可压缩流体,密度 $\rho_1 = \rho_2$,则得恒定元流的连续性方程

$$u_1 dA_1 = u_2 dA_2 = dQ \quad (6.2-4)$$

因总流为许多元流的有限集合体,故将上式在总流过流断面上积分

$$\int_{A_1} u_1 dA_1 = \int_{A_2} u_2 dA_2 = \int dQ$$

引入断面平均流速,可得恒定总流的连续性方程

$$v_1 A_1 = v_2 A_2 = Q \quad (6.2-5)$$

上式为不涉及任何作用力的运动学方程,对于理想流体和实际流体都适用。

【例 6.2-1】 图 6.2-5 所示突然扩大管段,已知扩大前后

管径之比 $\frac{d_1}{d_2} = \frac{1}{2}$,试求相应的流速之比 $\frac{v_1}{v_2}$ 。

解:据恒定总流的连续性方程 6.2-5

$$v_1 \cdot \frac{\pi}{4} d_1^2 = v_2 \cdot \frac{\pi}{4} d_2^2$$

$$\text{得} \quad \frac{v_1}{v_2} = \left(\frac{d_2}{d_1}\right)^2 = 4$$

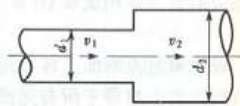


图 6.2-5

6.2.3 恒定总流的能量方程

恒定总流的能量方程是能量守恒定律在流体力学中的数学表达式,它与恒定总流的连续性方程相结合,可以解决许多流体力学问题。

1. 理想流体恒定元流的能量方程

在流场中,沿流向取一长度为 ds 、过流断面面积为 dA 的微小元流段,如图 6.2-6 所示。作用在流向 s 的外力有:进口断面的压力 $p dA$,出口断面的压力 $(p + dp) dA$,作用在元流段的重力在流向的分力 $dG \cos \alpha$,对于理想流体,作用在元流侧表面的切应力为零。

在流向 s 应用牛顿第二定律,有

$$p dA - (p + dp) dA - dG \cos \alpha = dm \cdot \frac{du}{dt}$$

式中 $dm = \rho dA ds$ 为元流段质量, $dG = \rho g dA ds$ 为元流段重量, $\cos \alpha$ 根据图 6.2-6 中几何关系有 $\cos \alpha = \frac{dz}{ds}$ 。将 dm 、 dG 、 $\cos \alpha$ 等关系式代入上式,化简整理,并考虑到 $\frac{ds}{dt} = u$,

$$u du = d\left(\frac{u^2}{2}\right), \text{得}$$

$$dz + \frac{1}{\rho g} dp + \frac{1}{g} d\left(\frac{u^2}{2}\right) = 0$$

对于不可压缩流体, $\rho = \text{常数}$, 故上式可写成

$$d\left(z + \frac{p}{\rho g} + \frac{u^2}{2g}\right) = 0$$

积分上式得

$$z + \frac{p}{\rho g} + \frac{u^2}{2g} = \text{常数} \quad (6.2-6)$$

或写成

$$z_1 + \frac{p_1}{\rho g} + \frac{u_1^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{\rho g} + \frac{u_2^2}{2g} \quad (6.2-6a)$$

这就是理想流体恒定元流的能量方程,该方程是由瑞士物理学家柏努利首先提出的,故亦称柏努利方程,它反映了恒定流中沿流线各点位置高度 z 、压强 p 和流速 u 之间的变化规律。

为了加深对柏努利方程的理解,下面对其物理意义和几何意义进行讨论。

从物理角度看, z 表示单位重量流体相对于某基准面所具有的位能; $\frac{p}{\rho g}$ 表示单位重量流体所具有的压能; $\frac{u^2}{2g}$ 表示单位重量流体所具有的动能。因通常将位能与压能之和称为势能,势能与动能之和称为机械能,故式(6.2-6)的物理意义为单位重量恒定不可压缩理想流体的机械能沿流线不变,即机械能守恒。

从几何角度看, z 表示元流过流断面上某点相对于某基准面的位置高度,称为位置水头; $\frac{p}{\rho g}$ 称为压强水头, $\frac{u^2}{2g}$ 称为流速水头。因通常将位置水头与压强水头之和称为测压管水头,测压管水头与流速水头之和称为总水头,故式(6.2-6)的几何意义为恒定不可压缩理想流体的总水头沿流线不变。

2. 实际流体恒定元流的能量方程

由于实际流体具有黏性,在流动过程中流层间内摩擦力做功,将使一部分机械能不可逆地转化为热能而耗散,因此实际流体流动的机械能将沿程减小。根据能量守恒原理,实际流体恒定元流的能量方程可写成

$$z_1 + \frac{p_1}{\rho g} + \frac{u_1^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{\rho g} + \frac{u_2^2}{2g} + h'_w \quad (6.2-7)$$

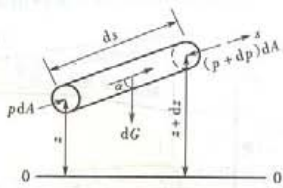


图 6.2-6

式中 h'_w 为元流中单位重量流体沿流程的机械能损失, 亦称元流的水头损失。

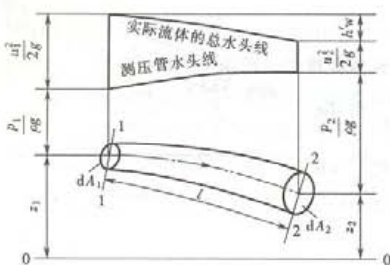


图 6.2-7

实际流体恒定元流的能量方程各项及总水头、测压管水头的沿程变化可用几何曲线表示。元流各过流断面的测压管水头的连线称为测压管水头线, 而总水头的连线称为总水头线(见图 6.2-7)。这两条线清晰地表示了流体的位能、压能和动能及其组合沿程的变化过程, 其变化的程度可分别用测压管坡度

$$J_p = -\frac{d\left(z + \frac{p}{\rho g}\right)}{ds} \quad (6.2-8)$$

和水力坡度(即总水头坡度)

$$J = -\frac{d\left(z + \frac{p}{\rho g} + \frac{u^2}{2g}\right)}{ds} \quad (6.2-9)$$

量度。实际流体的总水头线总是沿程下降的($J > 0$), 而测压管水头线沿程则可升($J_p < 0$)、可降($J_p > 0$), 也可不变($J_p = 0$), 主要取决于水头损失及动能与势能间相互转化的情况。

3. 恒定总流的能量方程

恒定总流的能量方程就是元流的能量方程式(6.2-7)在总流上的推广。以重量流量 $\rho g dQ = \rho g u_1 dA_1 = \rho g u_2 dA_2$ 乘以式(6.2-7)后在总流过流断面上积分:

$$\int_{A_1} \left(z_1 + \frac{p_1}{\rho g} + \frac{u_1^2}{2g} \right) \rho g u_1 dA_1 = \int_{A_2} \left(z_2 + \frac{p_2}{\rho g} + \frac{u_2^2}{2g} \right) \rho g u_2 dA_2 + \int_Q h'_w \rho g dQ \quad (6.2-10)$$

上式共包含三种类型的积分, 即

$$(1) \text{ 势能积分 } \int_A \left(z + \frac{p}{\rho g} \right) \rho g u dA$$

为便于积分, 将过流断面取在渐变流段。因渐变流断面上各点的 $z + \frac{p}{\rho g} = \text{常数}$, 则有

$$\int_A \left(z + \frac{p}{\rho g} \right) \rho g u dA = \rho g \left(z + \frac{p}{\rho g} \right) \int_A u dA = \left(z + \frac{p}{\rho g} \right) \rho g Q$$

$$(2) \text{ 动能积分 } \int_A \frac{u^3}{2g} \rho g dA$$

为便于计算, 通常用断面平均流速 v 表示实际动能, 同时考虑实际流体的流速不均匀性而加以修正, 即

$$\int_A \frac{u^3}{2g} \rho g dA = \frac{\alpha v^3}{2g} \rho g Q$$

式中 α 称为动能修正系数, 反映过流断面上流速分布不均匀程度, 一般流动的 $\alpha = 1.05 \sim 1.10$, 工程计算中常见流动通常取 $\alpha = 1.0$ 。

$$(3) \text{ 水头损失积分 } \int_Q h'_w \rho g dQ$$

根据积分中值定理, 可得

$$\int_Q h'_w \rho g dQ = h_w \rho g Q$$

式中 h_w 为单位重量流体在两过流断面间的平均机械能损失。

将上述关系代入式(6.2-10), 注意恒定流时 $Q_1 = Q_2 = Q$, 化简后得

$$z_1 + \frac{p_1}{\rho g} + \frac{\alpha_1 v_1^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{\rho g} + \frac{\alpha_2 v_2^2}{2g} + h_w \quad (6.2-11)$$

这就是实际流体恒定总流的能量方程(柏努利方程), 它在形式上类似于实际流体恒定元流的能量方程, 但是以断面平均流速 v 代替点流速 u (相应地考虑动能修正系数 α), 以平均水头损失 h_w 代替元流的水头损失 h'_w 。总流能量方程的物理意义和几何意义与元流的能量方程相类似。

恒定总流的能量方程的应用条件: ①流动必须是恒定流; ②流体是不可压缩的; ③质量力只有重力; ④选取的过流断面必须符合渐变流条件(两过流断面之间可以不是渐变流); ⑤两过流断面之间没有能量的输入或输出。当总流在两过流断面间通过水泵、风机或水轮机等流体机械时, 流体将额外地获得或失去能量, 则总流的能量方程应作如下修正:

$$z_1 + \frac{p_1}{\rho g} + \frac{\alpha_1 v_1^2}{2g} \pm H = z_2 + \frac{p_2}{\rho g} + \frac{\alpha_2 v_2^2}{2g} + h_w \quad (6.2-12)$$

式中: $+H$ 表示单位重量流体流水泵、风机所获得的能量; $-H$ 表示单位重量流体流经水轮机所失去的能量。

应用恒定总流的能量方程解题时应注意基准面、过流断面和计算点的选取, 这三个“选取”应综合考虑, 以计算方便为宜。原则上基准面可以任选, 但必须是水平面, 且两过流断面必须选取同一基准面, 通常使 $z \geq 0$; 过流断面必须选在渐变流段上, 且应选在已知量较多的断面上, 并使能量方程含有待求未知量; 过流断面上的计算点原则上可以任取, 为方便起见, 通常对于管流取在管轴中心, 对于明渠取在自由液面上。另外, 方程中的流体动压强 p_1 和 p_2 , 可以采用相对压强或绝对压强, 但方程两端必须统一。

4. 能量方程的应用

【例 6.2-2】皮托管是将流体动能转化为势能, 从而通过测压计测定流体点流速的仪器。它是由测压管和测速管(两端开口的直角弯管)组成, 其测速原理如图 6.2-8 所示。测速时, 将弯端管口正对来流方向置于 A 点下游同一直线上相距很近的 B 点, 来流在 B 点受测速管的阻滞流速为零(B 点称为滞止点或驻点), 动能全部转化为势能, 测速管内液柱保持一定高度。试根据 B、A 两点的测压管水头差 $h_u = \left(z_B + \frac{p_B}{\rho g}\right) - \left(z_A + \frac{p_A}{\rho g}\right)$ 计算 A 点的流速 u 。

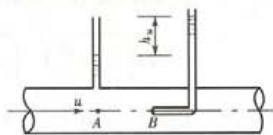


图 6.2-8

解: 将理想流体恒定元流的能量方程(6.2-6)应用于 A、B 两点, 有

$$z_A + \frac{p_A}{\rho g} + \frac{u^2}{2g} = z_B + \frac{p_B}{\rho g} + 0$$

$$\text{故得 } u = \sqrt{2g \left[\left(z_B + \frac{p_B}{\rho g} \right) - \left(z_A + \frac{p_A}{\rho g} \right) \right]} = \sqrt{2gh_u}$$

考虑到实际流体黏性作用引起的水头损失和测速管对水流的影响等,用上式计算 A 点流速尚需修正,即

$$u = \xi \sqrt{2gh_0} \quad (6.2-13)$$

式中 ξ 称为皮托管修正系数,其值与皮托管构造有关,由实验确定,通常很接近于 1.0。

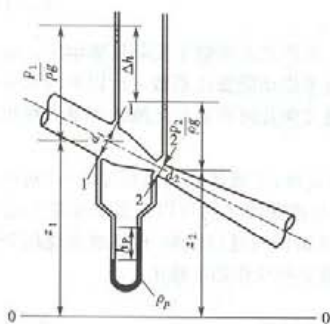


图 6.2-9

【例 6.2-3】文丘里流量计是一种测量有压管流量的仪器。如图 6.2-9 所示,它是由光滑的收缩段、喉道和扩散段三部分组成。管道过流时,因喉道断面缩小,流速增大,动能增加,势能减小,这样通过在收缩段进口断面和喉道断面安装测压管或差压计,实测两断面的测压管水头差,便可由恒定总流的能量方程得到管道的流量。若已知文丘里管进口直径 $d_1 = 100 \text{ mm}$,喉道直径 $d_2 = 50 \text{ mm}$,流量系数(实际流量与不计水头损失的理论流量之比) $\mu = 0.98$,实测测压管水头差 $\Delta h = 0.5 \text{ m}$,试求管道通过的流量 Q 。

解:选取渐变流进口断面 1—1 和喉道断面 2—2 为计算断面,计算点均取在管轴上,基准面 0—0 置于管道下某一固定位置。据 1—1、2—2 过流断面列恒定总流的能量方程(暂不考虑水头损失),有

$$z_1 + \frac{p_1}{\rho g} + \frac{\alpha_1 v_1^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{\rho g} + \frac{\alpha_2 v_2^2}{2g}$$

取 $\alpha_1 = \alpha_2 = 1.0$,整理上式得

$$\left[\left(\frac{v_2}{v_1} \right)^2 - 1 \right] \frac{v_1^2}{2g} = \left(z_1 + \frac{p_1}{\rho g} \right) - \left(z_2 + \frac{p_2}{\rho g} \right)$$

式中 $\frac{v_2}{v_1}$ 可由总流的连续性方程求得,即 $\frac{v_2}{v_1} = \frac{A_1}{A_2} = \left(\frac{d_1}{d_2} \right)^2$,将其代入上式,可得

$$v_1 = \frac{\sqrt{2g \left[\left(z_1 + \frac{p_1}{\rho g} \right) - \left(z_2 + \frac{p_2}{\rho g} \right) \right]}}{\left(\frac{d_1}{d_2} \right)^4 - 1}$$

故理论流量

$$\begin{aligned} Q &= v_1 \cdot \frac{\pi}{4} d_1^2 = \frac{\pi}{4} d_1^2 \frac{\sqrt{2g \left[\left(z_1 + \frac{p_1}{\rho g} \right) - \left(z_2 + \frac{p_2}{\rho g} \right) \right]}}{\left(\frac{d_1}{d_2} \right)^4 - 1} \\ &= K \sqrt{\Delta h} = K \sqrt{\left(\frac{\rho_2}{\rho} - 1 \right) h_p} \end{aligned}$$

式中 $K = \frac{\pi}{4} d_1^2 \sqrt{2g} / \sqrt{\left(\frac{d_1}{d_2} \right)^4 - 1}$ 取决于文丘里管的结构尺寸,称为文丘里管系数。

考虑到实际流体存在水头损失,实际流量略小于理论流量,即

$$Q = \mu K \sqrt{\Delta h} = \mu K \sqrt{\left(\frac{\rho_r}{\rho} - 1\right) h_r} \quad (6.2-14)$$

式中 μ 称为文丘里管流量系数,一般 $\mu = 0.95 \sim 0.98$ 。

对于本例,文丘里管系数

$$K = \frac{1}{4} \times 3.14 \times 0.1^2 \sqrt{2 \times 9.80} = 0.00898 \text{ m}^2/\text{s}$$

$$\sqrt{\left(\frac{0.1}{0.05}\right)^4 - 1}$$

故 $Q = \mu K \sqrt{\Delta h} = 0.98 \times 0.00898 \times \sqrt{0.5} = 0.00622 \text{ m}^3/\text{s}$ 。

【例 6.2-4】离心式通风机电集流器 B 从大气中吸入空气(如图 6.2-10),在直径 $d = 200 \text{ mm}$ 的圆柱形管道部分接一根下端插入盛水容器的玻璃管,若玻璃管中的水上升 $h = 150 \text{ mm}$,试求通风机电流量 Q 。已知空气的密度 $\rho_{r1} = 1.29 \text{ kg/m}^3$ 。

解:取管轴为 0-0 基准面,对 1-1,2-2 断面建立总流的能量方程(计算点均取在管轴上)

$$0 + 0 + 0 = 0 + \frac{p}{\rho_{r1} g} + \frac{\alpha v^2}{2g} + 0$$

式中 p 可据盛水容器由流体静力学方程求得,即

$$p + \rho_{r1} g h = 0$$

取 $\alpha = 1.0$,故

$$v = \sqrt{2g \frac{\rho_{r1} h}{\rho_{r1}}}$$

$$Q = v \frac{\pi}{4} d^2 = \frac{\pi}{4} d^2 \sqrt{2g \frac{\rho_{r1} h}{\rho_{r1}}} = \frac{\pi}{4} \times 0.2^2 \sqrt{2 \times 9.80 \times \frac{1000}{1.29} \times 0.15} = 1.5 \text{ m}^3/\text{s}$$

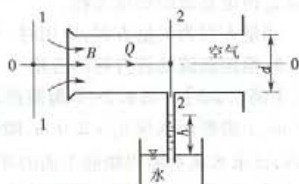


图 6.2-10

6.2.4 恒定总流的动量方程

恒定总流的动量方程是动量守恒定律在流体力学中的数学表达式,它反映了流体动量变化与作用力之间的关系。

1. 恒定总流动量方程推导

恒定总流动量方程可据理论力学中的动量定律导得。该定律可表述为:作用在所研究物体上所有外力的矢量和等于物体动量的变化率,即

$$\Sigma F = \frac{d(\Sigma mu)}{dt} \quad (6.2-15)$$

取如图 6.2-11 所示总流流段,其流体作恒定流动,则 dt 时间内总流流段的动量变化为

$$d(\Sigma mu) = \Sigma m_2 u_2 - \Sigma m_1 u_1$$

将 $m_1 = \rho u_1 dA_1 dt$, $m_2 = \rho u_2 dA_2 dt$ 代入上式,得

$$d(\Sigma mu) = \rho dt (\Sigma u_2 u_2 dA_2 - \Sigma u_1 u_1 dA_1)$$

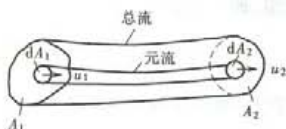


图 6.2-11

$$= \rho dt \left(\int_{A_2} u_2 u_2 dA_2 - \int_{A_1} u_1 u_1 dA_1 \right)$$

为便于计算,通常用断面平均流速 v 表示实际动量,同时考虑实际流体的流速不均匀性而加以修正,即

$$d(\Sigma mu) = \rho dt (\beta_2 v_2 Q_2 - \beta_1 v_1 Q_1)$$

式中 β 称为动量修正系数,反映过流断面上流速分布不均匀程度,一般流动的 $\beta = 1.02 \sim 1.05$,工程计算中常见

流动常取 $\beta = 1.0$ 。

若总流在流动过程中,流量沿程不变,即 $Q_1 = Q_2 = Q$,则将上式代入式 6.2-15 可得

$$\Sigma F = \rho Q (\beta_2 v_2 - \beta_1 v_1) \quad (6.2-16)$$

这就是恒定总流的动量方程。

动量方程为矢量方程,应用时一般是利用它在某坐标系上的投影式进行计算。

2. 恒定总流动量方程的应用

【例 6.2-5】 图 6.2-12 为矩形断面平坡渠道中水流越过一平顶障碍物。已知渠宽 $b = 1.5 \text{ m}$, 上游断面水深 $h_1 = 2.0 \text{ m}$, 障碍物顶部 2—2 断面水深 $h_2 = 0.5 \text{ m}$, 已测得流量 $Q = 1.5 \text{ m}^3/\text{s}$, 试求水流对障碍物迎水面的冲击力 F 。

解: 利用恒定总流动量方程计算水流对平顶障碍物迎水面的冲击力。取渐变流断面 1—1、2—2 以及液流边界所包围的封闭曲面为控制体,如图 6.2-13 所示。则作用在控制体上的外力有:两过流断面上的流体动压力 P_1 和 P_2 , 障碍物迎面对水流的作用力 F' 以及渠道支承反力 N 和控制体内流体重力 G 。

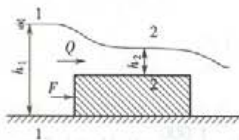


图 6.2-12

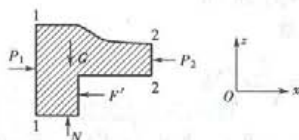


图 6.2-13

取 x 方向如图 6.2-13 所示,则在 x 方向建立恒定总流的动量方程,有

$$P_1 - P_2 - F' = \rho Q (\beta_2 v_2 - \beta_1 v_1)$$

式中 $P_1 = \frac{1}{2} \rho g b h_1^2 = \frac{1}{2} \times 1000 \times 9.80 \times 1.5 \times 2.0^2 = 29400 \text{ N}$

$$P_2 = \frac{1}{2} \rho g b h_2^2 = \frac{1}{2} \times 1000 \times 9.80 \times 1.5 \times 0.5^2 = 1837.5 \text{ N}$$

$$v_1 = \frac{Q}{b h_1} = \frac{1.5}{1.5 \times 2.0} = 0.5 \text{ m/s}$$

$$v_2 = \frac{Q}{b h_2} = \frac{1.5}{1.5 \times 0.5} = 2.0 \text{ m/s}$$

$$\beta_1 = \beta_2 = 1.0$$

故 $F' = P_1 - P_2 - \rho Q (v_2 - v_1)$
 $= 29400 - 1837.5 - 1000 \times 1.5 \times (2.0 - 0.5) = 25312.5 \text{ N} = 25.31 \text{ kN} (\leftarrow)$

水流对平顶障碍物迎水面的冲击力 F 与 F' 大小相等,方向相反。

6.3 流动阻力和水头损失

要求:了解实际流体的两种流态及其判别;理解层流、紊流运动的特征;理解边界层基本概念;掌握沿程水头损失和局部水头损失的计算;了解减小阻力的措施。

实际流体具有黏性,流体在流动过程中将产生流动阻力。当流体在固壁约束下流动时,称为内流,如管流、明渠流等,此时流体必须克服阻力做功,由此将产生机械能损失;当流体绕固体流动或者固体在流体中运动时,称为外流,如水流经过桥墩或颗粒在流体中上升或沉降等,此时水流受到桥墩的阻力或颗粒受到流体的阻力都是黏性阻力,称为绕流阻力。本节主要讨论内流的能量损失规律及计算方法,对绕流阻力仅作简单介绍。

6.3.1 实际流体流动的两种型态——层流和紊流

1. 雷诺实验

英国物理学家雷诺通过实验发现流体流动存在层流和紊流两种型态。其实验装置如图 6.3-1 所示。

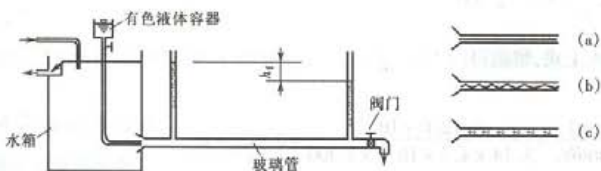


图 6.3-1

开启玻璃管的阀门,玻璃管中水开始流动,再开启有色液体容器阀门,放出适量有色液体与水一起流动。当玻璃管中流速 v 较小时,有色液体呈一直线状(如图 6.3-1(a)),各流层质点宏观上互不掺混,这种有规律的分层流动称为层流。随着流速 v 的增大,有色液体将出现波动(如图 6.3-1(b)),当流速 v 增大至某一数值,有色液体突然与周围清水掺混,这时流体质点的运动轨迹十分紊乱(如图 6.3-1(c)),这种流动称为紊流。如果实验以相反程序进行,即当管内流动已处于紊流状态,则流速必须减小到比前一临界值更小的数值,流动才会转变成层流。层流和紊流由于两者的内部结构不同,因此其能量损失的规律也不一样。由实验得到:等径直管上下游两断面间的水头损失,层流时与断面平均流速的一次方成正比,即 $h_f \propto v^{1.0}$;紊流时则与流速的 1.75~2.0 次方成正比,即 $h_f \propto v^{1.75-2.0}$ 。

2. 层流和紊流的判别标准——临界雷诺数

由于层流和紊流的水头损失规律各不相同,因此在工程计算中必须判明所研究流动的型态。流动型态的确定除了与流速大小有关外,还与管径和流体的黏性有关,因此采用综合各运动要素的雷诺数

$$Re = \frac{vd}{\nu} \quad (6.3-1)$$

作为判别流动型态的无量纲数,式中 v 、 d 、 ν 分别为流速、管径和流体的运动黏度。

大量实验表明,圆管流动由紊流转变到层流的临界雷诺数 $Re_c \approx 2300$,是相当稳定的,而

从层流转变到紊流的临界雷诺数却与实验环境有关,一般在4 000~20 000之间变化,故取 $Re_c = 2\,300$ 作为流动型态的判别依据。当 $Re < 2\,300$ 时为层流, $Re > 2\,300$ 时为紊流。

对于非圆管中的流动,雷诺数中的特征长度 d 可用水力半径

$$R = \frac{A}{\chi} \quad (6.3-2)$$

代替,这里 A 为过流断面面积, χ 为过流断面上固壁与流体接触的长度,称为湿周。对于有压圆管流动

$$R = \frac{\frac{\pi d^2}{4}}{\pi d} = \frac{d}{4}$$

故若用 R 代替 d 计算雷诺数,则其临界雷诺数为 $\frac{2\,300}{4} = 575$ 。

【例 6.3-1】 油在等径长直管道中流动,已知油的运动黏度 $\nu = 4.5 \times 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}$,流量 $Q = 2.0 \text{ L/s}$,如果使管流保持为层流状态,则管道直径 d 应为多少?

解:欲使管流保持为层流,则必有

$$Re = \frac{vd}{\nu} < Re_c = 2\,300$$

将 $v = \frac{Q}{\frac{\pi d^2}{4}}$ 代入上式,整理得

$$d > \frac{4Q}{\pi \nu Re_c} = \frac{4 \times 2.0 \times 10^{-3}}{3.14 \times 4.5 \times 10^{-5} \times 2\,300} = 0.0246 \text{ m}$$

即管径应大于24.6 mm。

【例 6.3-2】 水流经变径管段,已知变径前后管径之比 $\frac{d_1}{d_2} = 2$,则变径前后雷诺数之比 $\frac{Re_1}{Re_2}$ 为多少?

$$\text{解: } \frac{Re_1}{Re_2} = \frac{\frac{v_1 d_1}{\nu}}{\frac{v_2 d_2}{\nu}} = \frac{v_1}{v_2} \cdot \frac{d_1}{d_2}$$

由连续性方程 $v_1 \cdot \frac{\pi}{4} d_1^2 = v_2 \cdot \frac{\pi}{4} d_2^2$ 得 $\frac{v_1}{v_2} = \left(\frac{d_2}{d_1}\right)^2$,代入上式得

$$\frac{Re_1}{Re_2} = \left(\frac{d_2}{d_1}\right)^2 \cdot \frac{d_1}{d_2} = \frac{d_1}{d_2} = \frac{1}{2}$$

6.3.2 均匀流基本方程

取图 6.3-2 所示一段恒定均匀有压管流研究。因流体在均匀流动情况下只存在沿程不变的切应力产生的沿程水头损失 h_f ,故对总流过流断面1—1、2—2列柏努利方程,得

$$h_f = \left(z_1 + \frac{p_1}{\rho g}\right) - \left(z_2 + \frac{p_2}{\rho g}\right)$$

取1—1至2—2断面总流流段控制体,在流动方向 s 写动量方程,有

$$p_1 A - p_2 A + \rho g A \cos \alpha - \tau_0 x l = 0$$

将 $\cos \alpha = \frac{z_1 - z_2}{l}$ 代入上式, 并与柏努利方程联立, 可得均匀流基本方程

$$h_f = \frac{\tau_0 l}{\rho g R} \quad (6.3-3)$$

$$\text{或} \quad \tau_0 = \rho g R \frac{h_f}{l} = \rho g R J = \rho g \frac{r_0}{2} J \quad (6.3-4)$$

式中: τ_0 为边壁切应力; $R = \frac{A}{\chi}$ 为水力半径; $J = \frac{h_f}{l}$ 为水力坡度。

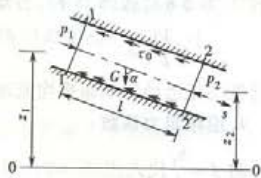


图 6.3-2

若取半径为 r 的流束研究, 按上述类似的分析, 可得流束边界切应力 τ 与沿程水头损失的关系

$$\tau = \rho g \frac{r}{2} J \quad (6.3-5)$$

比较式(6.3-4)与式(6.3-5), 可得

$$\tau = \frac{r}{r_0} \tau_0 \quad (6.3-6)$$

即圆管均匀流的过流断面上, 切应力 τ 呈线性分布, 管壁处切应力为最大值 τ_0 , 管轴处切应力为零。

6.3.3 圆管中的层流运动

1. 过流断面上流速分布

将牛顿内摩擦定律式(6.1-2)与均匀流基本方程式(6.3-5)联立, 并注意到 dy 与 dr 符号相反, 得

$$du = -\frac{\rho g J}{2\mu} r dr$$

积分上式

$$\int_0^u du = -\frac{\rho g J}{2\mu} \int_{r_0}^r r dr$$

得过流断面上流速分布

$$u = \frac{\rho g J}{4\mu} (r_0^2 - r^2) \quad (6.3-7)$$

上式说明圆管层流运动断面上流速分布呈旋转抛物面。

2. 过流断面上最大流速

过流断面上最大流速在管轴处, 即

$$u_{\max} = u|_{r=0} = \frac{\rho g J}{4\mu} r_0^2 \quad (6.3-8)$$

3. 断面平均流速

$$v = \frac{\int_A u dA}{A} = \frac{\int_0^{r_0} \frac{\rho g J}{4\mu} (r_0^2 - r^2) 2\pi r dr}{\pi r_0^2} = \frac{\rho g J}{8\mu} r_0^2 \quad (6.3-9)$$

比较式(6.3-8)、式(6.3-9),可知

$$v = \frac{1}{2} u_{\max} \quad (6.3-10)$$

即圆管层流运动的断面平均流速为最大流速的一半。

4. 沿程阻力系数

将 $J = \frac{h_f}{l}$ 代入式(6.3-9),可得圆管层流运动的沿程水头损失计算公式

$$h_f = \frac{8\mu l}{\rho g r_0^2} v = \frac{32\mu l}{\rho g d^2} v \quad (6.3-11)$$

上式说明圆管层流运动的沿程水头损失与断面平均流速的一次方成正比,与雷诺实验结果完全一致。

在流体力学中,习惯将水头损失用流速水头 $\frac{v^2}{2g}$ 表示,故式(6.3-11)可改写成

$$h_f = \frac{64}{\left(\frac{\rho v d}{\mu}\right)} \frac{l v^2}{d 2g} = \frac{64}{Re} \frac{l v^2}{d 2g}$$

$$\text{令 } \lambda = \frac{64}{Re} \quad (6.3-12)$$

$$\text{得 } h_f = \lambda \frac{l v^2}{d 2g} \quad (6.3-13)$$

上式称为达西公式,为均匀流沿程水头损失的普遍计算式,对层流、紊流均适用。式中 λ 称为沿程阻力系数,一般情况下, λ 与雷诺数 Re 和管壁相对粗糙度 $\frac{\Delta}{d}$ 有关,即 $\lambda = f(Re, \frac{\Delta}{d})$,但对于圆管层流运动, λ 仅与流态有关, $\lambda = f(Re) = \frac{64}{Re}$ 。

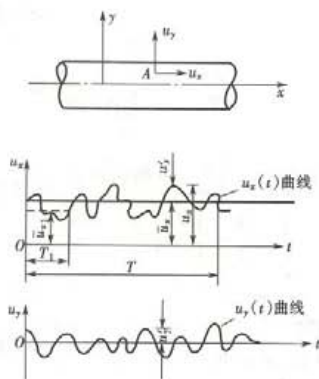


图 6.3-3

6.3.4 圆管中的紊流运动

1. 紊流运动的特征

紊流运动的基本特征是流体质点在运动中不断的互相掺混,使各点的流速、压强等运动要素在空间和时间上都具有随机性质的脉动。图 6.3-3 为实测的在恒定水位下水平圆管紊流中,质点通过某固定点 A 的瞬时流速 u_x 、 u'_x 的脉动情况。从实测结果看出,其瞬时流速虽随时间不断变化,但却总是围绕某一平均值在不断脉动。因此,可将紊流看作两个流动的叠加,即时间平均流动和脉动的叠加。如某点的瞬时流速 u 应等于相应的时间平均流速 \bar{u} 和脉动流速 u' 之和,即

$$u = \bar{u} + u'$$

$$\bar{u} = \frac{1}{T} \int_0^T u dt$$

严格地讲,紊流总是非恒定流。但引入时间平均流动概念后,只要某运动要素的时间平均值不随时间变化就可视为恒定流。前面根据恒定流导出的流体动力学基本方程,对于时间恒定紊流仍可照常适用。

2. 紊流切应力

紊流中的切应力 τ 除了由黏性引起的切应力 τ_1 外,还存在由紊动产生的附加切应力 τ_2 , 即

$$\tau = \tau_1 + \tau_2 \quad (6.3-14)$$

式中: $\tau_1 = \mu \frac{du}{dy}$; 经分析 $\tau_2 = -l \overline{u'_i u'_j}$, 普朗特设想流体质点的紊流运动与气体分子运动类似, 提出半经验的混合长度理论, 推导出

$$\tau_2 = \rho l^2 \left(\frac{du}{dy} \right)^2 \quad (6.3-15)$$

这里 l 称为混合长度, 但没有直接的物理意义。

式(6.3-14)中两部分切应力的大小随流动情况有所不同。当雷诺数较小时, 脉动较弱, τ_1 占优。随着雷诺数增加, 脉动加剧, τ_2 逐渐加大, 至雷诺数相当大时, τ_1 甚至可以忽略不计。

3. 紊流流速分布

紊流的流速分布在紧贴固壁附近和紊流核心区是不同的。在紧贴固壁附近有一极薄流层, 由于流动受壁限制, 消除了流体质点的掺混, 时均流速为线性分布, 切应力中 τ_2 可忽略不计, 就其时均特征来说, 这一薄层可认为属于层流运动, 故称为层流底层或黏性底层。黏性底层之外的流区, 称为紊流核心, 在紊流核心区内, 由于流体质点相互掺混和动量变换, 使过流断面上流速趋于均化。根据普朗特混合长度理论可得紊流过流断面上流速

$$u = \frac{v_*}{k} \ln y + C \quad (6.3-16)$$

为对数分布规律。式中 $v_* = \sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}}$ 为剪切速度; k 为卡门通用常数, 可由实验确定; y 为从管壁起算的径向距离; C 为常数, 取决于边界条件。

4. 沿程水头损失

紊流的沿程水头损失计算公式仍为达西公式(6.3-13)。一般情况下, 式中沿程阻力系数 $\lambda = f\left(Re, \frac{\Delta}{d}\right)$ 。紊流的 λ 无法像圆管层流一样由理论推导得到, 只能依靠实验研究。为了探讨 λ 与 Re 和 $\frac{\Delta}{d}$ 的变化规律, 德国科学家尼古拉兹在实验室对人工粗糙管(即在管壁上人为均匀地粘上一定粒径的砂子的管道)进行大量的实验, 其结果如图 6.3-4 所示, 称为尼古拉兹实验曲线图。

根据 λ 的变化特征, 图中曲线可分为五个区域, 即

层流区(ab 线): $Re < 2300$, $\lambda = f(Re) = \frac{64}{Re}$, 管流的沿程水头损失 $h_f \propto v^{1.0}$, 与理论分析成果完全一致。

层流向紊流的过渡区(bc 线): $2300 < Re < 4000$, $\lambda = f(Re)$, 与 $\frac{\Delta}{d}$ 无关。

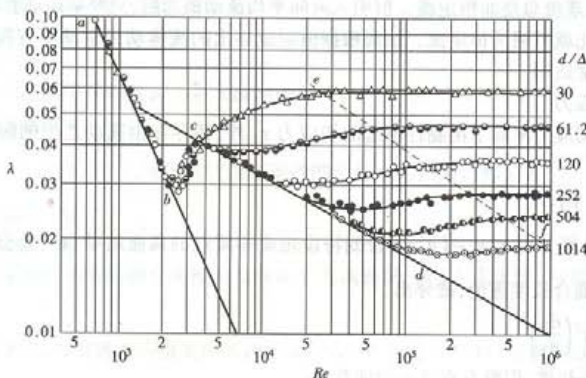


图 6.3-4

紊流光滑区(cd线): $4\,000 < Re < \frac{80d}{\Delta}$, 此区内由于粗糙度 Δ 被黏性底层所覆盖, 对沿程阻力系数 λ 没有影响, $\lambda = f(Re)$, $h_f \propto v^{1.75}$ 。

紊流过渡区(cd线和ef线之间的区域): $\frac{80d}{\Delta} < Re < \frac{1\,140d}{\Delta}$, 随着 Re 的增大, 黏性底层厚度减小, 粗糙度 Δ 开始发生影响。在该区 λ 与 Re 和 $\frac{\Delta}{d}$ 都有关系, 即 $\lambda = f\left(Re, \frac{\Delta}{d}\right)$ 。

紊流粗糙区(ef线以右的区域): $Re > \frac{1\,140d}{\Delta}$, 曲线呈水平线, λ 与 Re 无关, 而仅与 $\frac{\Delta}{d}$ 有关, 即 $\lambda = f\left(\frac{\Delta}{d}\right)$ 。 $h_f \propto v^{2.0}$, 故该区亦称为阻力平方区。

尼古拉兹实验使用的人工粗糙管, 其成果不能完全用于工业管道。原因在于工业管道的粗糙物是在制造过程中形成的, 其粗糙物在形状、大小、分布规律等方面与人工粗糙管有很大差异。柯列勃洛克根据大量工业管道试验资料, 提出了适用于工业管道紊流三个区的 λ 计算公式, 即柯列勃洛克公式

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = -2 \lg \left(\frac{\Delta}{3.7d} + \frac{2.51}{Re} \right) \quad (6.3-17)$$

上式在工业管流的计算中应用广泛。式中 Δ 为工业管道的当量粗糙高度。常用管材的当量粗糙度见表 6.3-1。

表 6.3-1 常用管材的当量粗糙度 Δ

管材种类	Δ/mm	管材种类	Δ/mm
玻璃管	0.001	镀锌铁管(新)	0.15
无缝钢管(新)	0.014	镀锌铁管(旧)	0.50
无缝钢管(旧)	0.20	铸铁管(新)	0.30
焊接钢管(新)	0.06	铸铁管(旧)	1.20
焊接钢管(旧)	1.0	水泥管	0.50

式(6.3-17)比较复杂,计算很不方便。下面两个公式计算较为简便,同样适用于工业管道的紊流三个区。

$$\text{巴尔公式: } \frac{1}{\sqrt{\lambda}} = -2 \lg \left(\frac{\Delta}{3.7d} + \frac{5.1286}{Re^{0.89}} \right) \quad (6.3-18)$$

$$\text{阿里特苏里公式: } \lambda = 0.11 \left(\frac{\Delta}{d} + \frac{68}{Re} \right)^{0.25} \quad (6.3-19)$$

对于明渠水流,通常采用谢才公式

$$v = C \sqrt{RJ} \quad (6.3-20)$$

其中谢才系数

$$C = \sqrt{\frac{8g}{\lambda}} \quad (6.3-21)$$

表明 C 和 λ 一样是反映沿程阻力系数变化规律的系数。在紊流粗糙区,谢才系数可直接由下列经验公式计算。

$$\text{曼宁公式: } C = \frac{1}{n} R^{\frac{1}{6}} \quad (6.3-22)$$

$$\text{巴甫洛夫斯基公式: } C = \frac{1}{n} R^y \quad (6.3-23)$$

$$\text{其中 } y = 2.5\sqrt{n} - 0.13 - 0.75\sqrt{R}(\sqrt{n} - 0.1) - 0.3 \quad (6.3-24)$$

式中: R 为水力半径,以 m 计; n 为渠壁粗糙系数,亦称糙率,为综合反映壁面粗糙情况的无量纲数,见表 6.3-2。

表 6.3-2 粗糙系数 n 值

类 型	n
缸瓦管(带釉)	0.013
混凝土和钢筋混凝土的雨水管	0.013
混凝土和钢筋混凝土的污水管	0.014
石棉水泥道	0.012
铸铁管	0.013
钢管	0.012
水泥砂浆抹面管道	0.013
砖砌渠道(不抹面)	0.015
浆砌块石渠道(不抹面)	0.017
干砌块石渠道	0.020 ~ 0.025
情况不好的石渠道	0.025 ~ 0.035
木槽	0.012 ~ 0.014
情况很好的土渠	0.020 ~ 0.025
土渠(包括带草皮的)	0.025 ~ 0.030
情况极坏的土渠(断面不规则,有块石、杂草,水流不畅等)	0.035 ~ 0.045
天然河道:情况很好	0.025 ~ 0.035
情况不好	0.045 ~ 0.060
杂草丛生,情况极坏	0.075 ~ 0.150

【例 6.3-3】 已知城市给水干管某处的水压 $p = 196.2 \text{ kPa}$, 从该处引出一根水平输水管, 直径 $d = 250 \text{ mm}$, 当量粗糙高度 $\Delta = 0.4 \text{ mm}$ 。若在保证通过流量 $Q = 50 \text{ L/s}$, 问能输送到多远 (水的运动黏度 $\nu = 0.0131 \text{ cm}^2/\text{s}$)?

解: 由干、支管相接处至支管出口建立柏努利方程, 有

$$\frac{p}{\rho g} = \lambda \frac{l v^2}{d 2g}$$

$$\text{式中 } v = \frac{Q}{\frac{\pi}{4} d^2} = \frac{4 \times 50 \times 10^{-3}}{\pi \times 0.25^2} = 1.02 \text{ m/s}$$

$$Re = \frac{vd}{\nu} = \frac{1.02 \times 0.25}{0.0131 \times 10^{-4}} = 1.95 \times 10^5$$

$$\lambda = 0.11 \left(\frac{\Delta}{d} + \frac{68}{Re} \right)^{0.25} = 0.11 \left(\frac{0.4}{250} + \frac{68}{1.95 \times 10^5} \right)^{0.25} = 0.023$$

$$\text{故 } l = \frac{2pd}{\rho \lambda v^2} = \frac{2 \times 196.2 \times 10^3 \times 0.25}{1000 \times 0.023 \times 1.02^2} = 4100 \text{ m}$$

即能输送 4100 m 远。

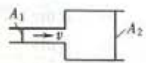
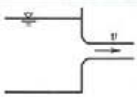
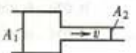
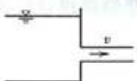
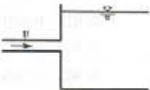
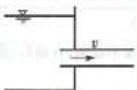
6.3.5 局部水头损失

在流动过程中, 当出现边界条件急剧变化, 如过流断面突然扩大或缩小、管道转弯或遇到阀门等局部障碍, 使流速的方向和大小发生变化, 甚至产生旋涡。这些现象一般发生在局部流程中, 由此引起的能量损失称为局部水头损失, 其通用计算公式为

$$h_l = \xi \frac{v^2}{2g} \quad (6.3-25)$$

式中 ξ 为局部阻力系数, 可由实验确定, 表 6.3-3 列出了常见的几种局部阻力系数值。

表 6.3-3 常见管路局部阻力系数 ξ

名称	图示	ξ	名称	图示	ξ
断面突然扩大		$\left(1 - \frac{A_1}{A_2}\right)^2$	圆角进口		0.05 ~ 0.25
断面突然缩小		$0.5 \left(1 - \frac{A_2}{A_1}\right)$	直角进口		0.50
出口		1.0	内插进口		1.0

其余各种局部阻力系数可查阅有关水力计算手册。

6.3.6 减小阻力的措施

产生流动阻力的原因既有内因,也有外因。黏性是流体的固有属性,是运动流体产生阻力、耗散机械能的内因;外部的干扰,如边壁的粗糙、连界形状的改变等则是产生流动阻力的外因。因此,减小阻力的措施可以从产生阻力的原因出发,一是在流体内部投加极少量的添加剂,使其影响流体运动的内部结构来实现减阻;二是改进流体外部的边界,如减小管壁的粗糙度、用柔性边壁代替刚性边壁、采用导流管件防止漩涡区产生等,改善边壁对流动的影响来实现减阻。

6.4 孔口、管嘴、管道流动

要求:理解孔口、管嘴、短管、长管的水力计算特点;掌握孔口、管嘴及有压管道恒定流的水力计算。

孔口、管嘴和有压管道恒定流动的水力计算,是连续性方程、能量方程以及流动阻力和水头损失规律的具体应用。

6.4.1 薄壁小孔口恒定出流

流体经孔口($l/d \approx 0$)流出称为孔口出流,如图 6.4-1 所示。

当容器中水位(或压强)不变,孔口的出流量恒定时,称为恒定出流。当容器壁较薄或孔口具有锐缘时,孔口壁厚对水流现象没有影响,称为薄壁孔口。若流体经孔口流入空气中则称为自由出流,否则称为淹没出流。由于水流运动的惯性,容器中流体经孔口流出后将形成流束直径为最小的收缩断面 C—C。收缩断面面积 A_c 小于孔口面积 A ,其比值 $\varepsilon = \frac{A_c}{A}$,称为收缩系数。

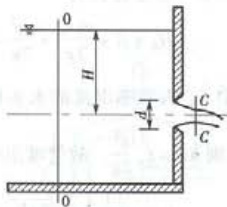


图 6.4-1

当孔口断面尺寸远小于作用水头(如 $\frac{d}{H} \leq 0.1$)时,C—C 断面上各点的水头可以认为相等,此时孔口称为小孔口。

取通过孔口中心的水平面为基准面,对 0—0 断面和 C—C 断面列能量方程有

$$H + \frac{p_s}{\rho g} + \frac{\alpha_0 v_0^2}{2g} = 0 + \frac{p_c}{\rho g} + \frac{\alpha_c v_c^2}{2g} + h_w$$

式中: $p_c \approx p_s$;孔口出流时, $h_w = h_j = \xi_0 \frac{v_c^2}{2g}$,这里 ξ_0 为孔口局部阻力系数。

令 $H_0 = H + \frac{\alpha_0 v_0^2}{2g}$,代入上式整理得

$$v_c = \frac{1}{\sqrt{\alpha_c + \xi_0}} \sqrt{2gH_0} = \varphi \sqrt{2gH_0} \quad (6.4-1)$$

式中: $\varphi = \frac{1}{\sqrt{\alpha_c + \xi_0}} \approx \frac{1}{\sqrt{1 + \xi_0}}$,称为孔口流速系数; H_0 为作用水头。

流经孔口的流量

$$Q = v_c A_c = \varepsilon A \varphi \sqrt{2gH_0} = \mu A \sqrt{2gH_0} \quad (6.4-2)$$

式中 $\mu = \varepsilon\varphi$ 称为孔口的流量系数。对于薄壁小孔口,由实验测得 $\varepsilon = 0.63 \sim 0.64$, $\varphi = 0.97 \sim 0.98$,故 $\mu = 0.60 \sim 0.62$ 。

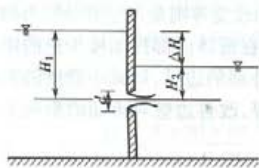


图 6.4-2

当流体经孔口淹没出流时(见图 6.4-2),按照与上述同样的分析可得薄壁小孔口淹没出流的流速和流量的计算公式,形式上仍为式(6.4-1)和式(6.4-2),流速系数 φ 和流量系数 μ 的数值也完全相同,只是 H_0 的涵义不同,为两液面的高差 ΔH 。

6.4.2 管嘴的恒定出流

当孔口壁厚 $l = (3 \sim 4)d$ 时,或在孔口处外接一长度 $l = (3 \sim 4)d$ 的短管时(见图 6.4-3),流体经其流出称为管嘴出流。管嘴出流的特点是:当流体进入管嘴后形成收缩,在收缩断面 $C-C$ 处流体与管壁分离,形成漩涡区,然后又逐渐扩大,在管嘴出口断面上,流体完全充满整个断面。

以通过管嘴中心的水平面为基准面,从 0—0 断面至 1—1 断面建立能量方程有

$$H_0 = H + \frac{\alpha_0 v_0^2}{2g} = \frac{\alpha v^2}{2g} + h_w$$

式中 h_w 为管嘴出水的水头损失,因 $\frac{l}{d}$ 较小,可忽略沿程水头损失,则 $h_w = \xi_n \frac{v^2}{2g}$ 。故管嘴出口断面平均流速

$$v = \frac{1}{\sqrt{\alpha + \xi_n}} \sqrt{2gH_0} = \varphi_n \sqrt{2gH_0} \quad (6.4-3)$$

式中 $\varphi_n = \frac{1}{\sqrt{\alpha + \xi_n}}$ 称为管嘴流速系数。

流经管嘴的流量

$$Q = vA = \varphi_n A \sqrt{2gH_0} = \mu_n A \sqrt{2gH_0} \quad (6.4-4)$$

式中 $\mu_n = \varphi_n$ 称为管嘴流量系数。

据实验资料得圆柱形外管嘴的局部阻力系数 $\xi_n = 0.5$,取动能修正系数 $\alpha = 1.0$,则得 $\mu_n = \varphi_n = \frac{1}{\sqrt{1.0 + 0.5}} = 0.82$ 。比较式(6.4-2)和式(6.4-4)可知,在相同直径 d 、相同作用水头 H 条件下,管嘴出流流量比孔口出流量要大得多。究其原因,是管嘴在收缩断面 $C-C$ 处存在真空的作用。可以证明管嘴收缩断面处的真空度可达作用水头的 0.75 倍,即 $\frac{p_{vc}}{\rho g} = 0.75H_0$,相当于把管嘴的作用水头增大了约 75%。作用水头 H_0 越大,收缩断面的真空度就越大。但是当真空度达 7 m 水柱以上时,由于液体会发生汽化或空气会自管嘴出口处吸入,从而使真空破坏。因此对圆柱形外管嘴的作用水头应加以限制: $H_0 \leq \frac{7}{0.75} = 9 \text{ m}$ 。

综上所述,为保证管嘴正常工作,需满足 $l = (3 \sim 4)d$ 及 $H_0 \leq 9 \text{ m}$ 两个条件。

【例 6.4-1】圆柱形外管嘴($\mu_n = 0.82$)与同直径 d 、同作用水头 H_0 下的孔口($\mu = 0.62$)

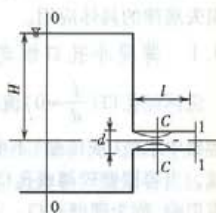


图 6.4-3

相比较,当管嘴流量 $Q_n = 3 \text{ L/s}$ 时,孔口流量 Q 为多少?

解:由式(6.4-2)和式(6.4-4)得

$$\frac{Q}{Q_n} = \frac{\mu A \sqrt{2gH_0}}{\mu_n A \sqrt{2gH_0}} = \frac{\mu}{\mu_n} = \frac{0.62}{0.82} = 0.756$$

则 $Q = 0.756 Q_n = 0.756 \times 3 = 2.27 \text{ L/s}$ 。

6.4.3 有压管道恒定流

有压管道恒定流的水力计算类型通常有确定管道的通过能力、确定相应的水头或断面压强、确定管径等。

1. 短管水力计算

在管路的总水头损失中,沿程水头损失和局部水头损失所占比重相当,计算时均不可忽略的管路(通常在 $\frac{l}{d} < 1000$ 条件下),称为短管。如工程中的水泵吸水管、虹吸管、倒虹吸管和有压涵管等,一般均按短管计算。

下面结合工程中常见短管问题说明其水力计算方法。

(1) 水泵吸水管

离心式水泵进口前的管道称为吸水管,如图 6.4-4 所示。因离心式水泵泵轴高于吸水池水面,水泵工作时,在吸水管内将形成真空。若真空值过大,将产生气蚀现象,致使水泵部件受损。工程中为了防止气蚀发生,通常由实验确定水泵进口的允许真空度 $[h_v]$ 。

吸水管的水力计算主要是根据 $[h_v]$ 确定水泵的允许安装高度 H_s 。

【例 6.4-2】 如图 6.4-4 所示的离心式水泵,已知抽水量 $Q = 76 \text{ m}^3/\text{h}$,吸水管长度 $l = 10 \text{ m}$,直径 $d = 150 \text{ mm}$,沿程阻力系数 $\lambda = 0.040$,局部阻力系数:带底阀的滤水口 $\xi_1 = 5.5$,弯管 $\xi_2 = 0.25$ 。若允许真空度 $[h_v] = 6.2 \text{ m}$,试确定水泵的允许安装高度 H_s 。

解:取吸水池水面 1—1 和水泵进口 2—2 列能量方程,并忽略吸水面流速,得

$$\frac{p_1}{\rho g} = H_s + \frac{p_2}{\rho g} + \frac{\alpha v^2}{2g} + h_w$$

$$\text{其中 } h_w = \lambda \frac{l}{d} \frac{v^2}{2g} + \xi_1 \frac{v^2}{2g} + \xi_2 \frac{v^2}{2g}$$

$$\text{取 } \frac{p_1 - p_2}{\rho g} = [h_v]$$

$$\text{则得 } H_s = [h_v] - \left(\alpha + \lambda \frac{l}{d} + \xi_1 + \xi_2 \right) \frac{v^2}{2g}$$

$$\text{式中 } v = \frac{4Q}{\pi d^2} = \frac{4 \times 76}{\pi \times 0.15^2} = 1.19 \text{ m/s}$$

$$\text{故 } H_s = 6.2 - \left(1.0 + 0.040 \times \frac{10}{0.15} + 5.5 + 0.25 \right) \times \frac{1.19^2}{2 \times 9.80} = 5.52 \text{ m}$$

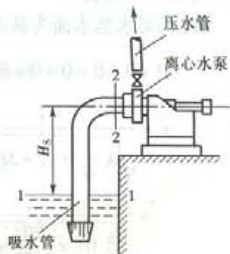


图 6.4-4

即水泵安装高度不能超过 5.52 m。

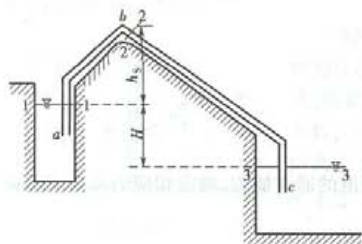


图 6.4-5

(2) 虹吸管

虹吸管是一种压力输水管道,如图 6.4-5 所示。与水泵吸水管一样,虹吸管工作时,管路必然会出现真空区段,当真空值过大时,会汽化产生气泡,破坏虹吸管的正常工作。工程中为保证虹吸管能通过设计流量,一般限制管中最大真空度不超过允许值 $[h_v] = 7 \sim 8 \text{ mmH}_2\text{O}$ 。

虹吸管的水力计算主要是确定通过能力和校核管内最大真空度。

【例 6.4-3】 如图 6.4-5 所示,用虹吸管自钻井输水至集水池。已知虹吸管长度 $l = l_{ab} + l_{bc} = 30 \text{ m} + 40 \text{ m} = 70 \text{ m}$,管径 $d = 200 \text{ mm}$,钻井至集水池间的恒定水位高差 $H = 1.60 \text{ m}$,虹吸管顶点 B 处的安装高度 $h_s = 4.5 \text{ m}$,管道沿程阻力系数 $\lambda = 0.03$,局部阻力系数:管道进口 $\xi_1 = 0.5$,弯头 $\xi_2 = 0.2$,出口 $\xi_3 = 1.0$,试求管中流量和管内最大真空度。

解:以集水池水面为基准面,钻井水面 1—1 与集水池水面 3—3 间建立能量方程

$$H + 0 + 0 = 0 + 0 + 0 + \lambda \frac{l}{d} \frac{v^2}{2g} + \xi_1 \frac{v^2}{2g} + 3\xi_2 \frac{v^2}{2g} + \xi_3 \frac{v^2}{2g}$$

$$\begin{aligned} \text{得 } v &= \frac{1}{\sqrt{\lambda \frac{l}{d} + \xi_1 + 3\xi_2 + \xi_3}} \sqrt{2gH} \\ &= \frac{1}{\sqrt{0.03 \times \frac{70}{0.20} + 0.5 + 3 \times 0.2 + 1.0}} \sqrt{2 \times 9.80 \times 1.60} = 1.58 \text{ m/s} \end{aligned}$$

$$\text{故 } Q = \frac{\pi}{4} d^2 v = \frac{\pi}{4} \times 0.20^2 \times 1.58 = 0.0496 \text{ m}^3/\text{s} = 49.6 \text{ L/s}$$

管内最高点 B 处的真空度最大。以钻井水面为基准面,在 1—1 断面与 2—2 断面间建立能量方程

$$0 + \frac{p_1}{\rho g} + 0 = h_s + \frac{h_2}{\rho g} + \frac{\alpha v^2}{2g} + \lambda \frac{l_{ab}}{d} \frac{v^2}{2g} + \xi_1 \frac{v^2}{2g} + 2\xi_2 \frac{v^2}{2g}$$

取 $\alpha = 1.0$,则管内最大真空度

$$\begin{aligned} h_v &= \frac{p_1 - p_2}{\rho g} = h_s + \left(\alpha + \lambda \frac{l_{ab}}{d} + \xi_1 + 2\xi_2 \right) \frac{v^2}{2g} \\ &= 4.5 + \left(1.0 + 0.03 \times \frac{30}{0.20} + 0.5 + 2 \times 0.2 \right) \times \frac{1.58^2}{2 \times 9.80} \\ &= 5.32 \text{ mmH}_2\text{O} \end{aligned}$$

因管内最大真空度 $h_v < [h_v] = 7 \sim 8 \text{ mmH}_2\text{O}$,故虹吸管高度 $h_s = 4.5 \text{ m}$ 时,虹吸管可以正常工作。

(3) 倒虹管

倒虹管与虹吸管正好相反,管道一般低于上下游水面,依靠上下游水位差作用进行输水。

倒虹管常用在不便直接跨越的地方,如过江有压涵管、埋在铁(公)路下的输水涵管等。

【例 6.4-4】如图 6.4-6 所示下水道穿过河流时采用倒虹管。已知污水流量 $Q = 0.10 \text{ m}^3/\text{s}$, 管长 $l = 50 \text{ m}$, 管道沿程阻力系数 $\lambda = 0.03$, 局部阻力系数: 进口 $\xi_e = 0.6$, 弯道 $\xi_b = 0.05$ 。为避免污物在管中沉积, 管中流速要求大于 1.2 m/s 。倒虹管进、出口流速 $v_0 = 0.8 \text{ m/s}$, 试确定倒虹管管径 d 及倒虹管上下游水位差 H 。

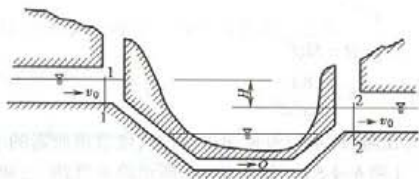


图 6.4-6

解: 据题意 $\frac{Q}{\frac{\pi d^2}{4}} > 1.2$ 得

$$d < \sqrt{\frac{4 \times 0.1}{\pi \times 1.2}} = 0.326 \text{ m}$$

取标准管径 $d = 300 \text{ mm}$, 则倒虹管中流速为

$$v = \frac{4Q}{\pi d^2} = \frac{4 \times 0.1}{\pi \times 0.3^2} = 1.42 \text{ m/s}$$

取下游水面为基准面, 在 1—1 断面与 2—2 断面间建立能量方程, 得

$$H + 0 + \frac{\alpha_1 v_0^2}{2g} = 0 + 0 + \frac{\alpha_2 v^2}{2g} + h_w$$

$$\text{式中 } h_w = \lambda \frac{l}{d} \frac{v^2}{2g} + \xi_e \frac{v^2}{2g} + 2\xi_b \frac{v^2}{2g} + \frac{(v - v_0)^2}{2g}$$

$$= \left(0.03 \times \frac{50}{0.30} + 0.6 + 2 \times 0.05 \right) \times \frac{1.42^2}{2 \times 9.80} + \frac{(1.42 - 0.8)^2}{2 \times 9.80} = 0.61 \text{ m}$$

$$\alpha_1 = \alpha_2 = 1.0$$

$$\text{故 } H = h_w = 0.61 \text{ m}$$

2. 长管水力计算

流速水头和局部水头损失的总和与沿程水头损失相比可忽略不计的管路(通常在 $\frac{l}{d} > 1000$ 条件下), 称为长管。在长管水力计算中, 根据管道系统的组合情况, 又可分为简单管路、串联管路和并联管路等。

(1) 简单管路

沿程直径不变、流量不变的管路称为简单管路。简单管路的计算是一切复杂管路水力计算的基础。

对于图 6.4-7 所示简单长管, 取 0—0 基准面, 对断面 1—1 和断面 2—2 建立能量方程, 得

$$H + 0 + 0 = 0 + 0 + 0 + h_f$$

$$\text{则 } H = h_f = \lambda \frac{l v^2}{d 2g}$$

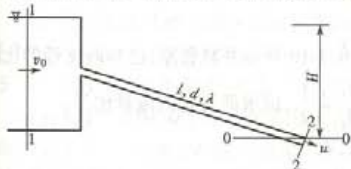


图 6.4-7

将 $v = \frac{Q}{\frac{\pi}{4}d^2}$ 代入上式,得

$$H = SlQ^2 \quad (6.4-5)$$

式中 $S = \frac{8\lambda}{g\pi^2 d^5}$ (6.4-6)

称为比阻,即单位流量通过单位长度管道所需的水头。

【例 6.4-5】如图 6.4-7 所示简单管路,已知 $l = 300 \text{ m}$, $d = 200 \text{ mm}$, $\lambda = 0.025$, $H = 5 \text{ m}$, 试求管中流量 Q 。

解:因 $\frac{l}{d} = \frac{300}{0.20} = 1500 > 1000$,可按长管计算。由式(6.4-6)得比阻

$$S = \frac{8 \times 0.025}{9.80 \times 3.14^2 \times 0.20^5} = 6.4684 \text{ s}^2/\text{m}^6$$

代入式(6.4-5),得

$$Q = \sqrt{\frac{H}{Sl}} = \sqrt{\frac{5}{6.4684 \times 300}} = 0.0508 \text{ m}^3/\text{s} = 50.8 \text{ L/s}$$

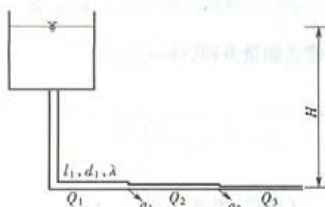


图 6.4-8

(2) 串联管路

由直径不同的管段顺次连接而成的管路,称为串联管路。串联管路各管段通过的流量可以不相同,如图 6.4-8 所示。

串联管路计算原理仍是能量方程和连续性方程,其水力关系为

$$H = \sum h_{f_i} = \sum S_{f_i} l_i Q_i^2 \quad (6.4-7)$$

$$Q_i = Q_{i-1} + q_i \quad (6.4-8)$$

(3) 并联管路

在两节点之间并设两条以上管道的管路系统,称为并联管路,如图 6.4-9 所示。并联管路各支管的管径、管长、管材及流量等可不一定相同。

并联管路计算原理仍是能量方程和连续性方程,其水力关系为

$$h_{f_1} = h_{f_2} = \dots = h_{f_n} = h_{f_{ab}} \quad (6.4-9)$$

即并联管路总的能量损失等于各支管的能量损失。

$$Q = Q_1 + Q_2 + \dots + Q_n = \sum Q_i \quad (6.4-10)$$

即总管流量等于各支管流量之和。

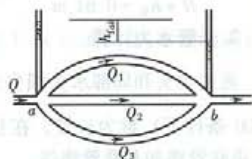


图 6.4-9

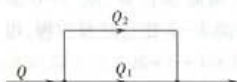


图 6.4-10

【例 6.4-6】图 6.4-10 所示并联管路,已知两支管的比阻比 $S_1/S_2 = 1$, 管长比 $l_1/l_2 = \frac{1}{2}$, 试求两支管的流量比 $\frac{Q_1}{Q_2}$ 。

解:由式(6.4-9),有

$$S_1 l_1 Q_1^2 = S_2 l_2 Q_2^2$$

故
$$\frac{Q_1}{Q_2} = \sqrt{\frac{S_2}{S_1} \cdot \frac{l_2}{l_1}} = \sqrt{2} = 1.414$$

【例 6.4-7】如图 6.4-11 所示水面差为 H 的两水箱间并设两根直长管。已知 $\lambda_1 = \lambda_2, l_1 = l_2$, 若要求两支管流量比 $\frac{Q_1}{Q_2} = 5.66$, 试确定两支管管径比 $\frac{d_1}{d_2}$ 。

解:由式 6.4-9 有

$$\lambda_1 \frac{l_1 v_1^2}{d_1 2g} = \lambda_2 \frac{l_2 v_2^2}{d_2 2g}$$

将 $v_1 = \frac{Q}{\frac{\pi}{4}d_1^2}, v_2 = \frac{Q}{\frac{\pi}{4}d_2^2}$ 代入上式,整理得

$$\frac{d_1}{d_2} = \sqrt[5]{\frac{\lambda_1}{\lambda_2} \cdot \frac{l_1}{l_2} \cdot \frac{Q_1^2}{Q_2^2}} = 2$$

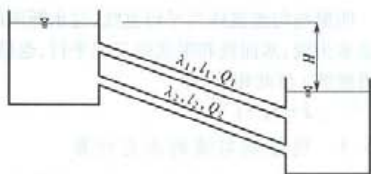


图 6.4-11

6.5 明渠恒定流

要求:了解明渠的分类;理解明渠均匀流的产生条件及水力特征;理解明渠水力最优断面及允许流速概念;掌握明渠均匀流水力计算;了解明渠恒定非均匀流的流动状态。

6.5.1 概述

明渠流是一种具有自由液面的流动,液面上相对压强为零,故明渠流又称为无压流动。天然河道和人工渠道中的流动是典型的明渠流。当液体不能充满管道时,如交通土木工程中的无压涵管、市政工程中的污水管道中的流动,也属于明渠流。

明渠水流根据运动要素是否随时间变化可分为恒定流和非恒定流;在明渠恒定流中,又根据运动要素是否沿流程变化可分为均匀流和非均匀流。本节重点讨论明渠恒定均匀流的水力计算。

明渠水流在渠道中流动,受到渠道断面和底坡的影响。渠道断面的形状及尺寸沿程不变的长直渠道称为棱柱形渠道。棱柱形渠道的过水面积仅随水深变化,即 $A = f(h)$, 否则称为非棱柱形渠道。渠底高程沿水流方面的变化可用渠底坡度 i 表示。如图 6.5-1 所示

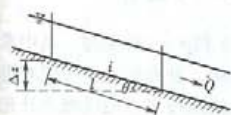


图 6.5-1

$$i = \frac{\Delta z}{l} = \sin \theta \quad (6.5-1)$$

通常 θ 角很小,习惯上常用两断面间的水平距离代替 l , 则

$$i = \tan \theta \quad (6.5-2)$$

同样,因渠道底坡 i 很小,在实用上常以铅垂断面代替实际过流断面,用铅垂水深 h 代替过流断面水深。

根据渠底坡度可将渠道分成顺坡渠道 ($i > 0$)、平坡渠道 ($i = 0$) 和逆坡渠道 ($i < 0$), 如图 6.5-2 所示。

6.5.2 明渠均匀流的形成条件和水力特征

明渠水流一般情况下常以非均匀流出现,只有在特殊情况下,才会出现均匀流。形成明渠均匀流的条件为:长而直的棱柱形渠道;底坡 $i > 0$, 且沿程保持不变;渠道的粗糙情况沿程没有变化;渠中水流为恒定流,且沿程流量保持不变。只有全部满足上述条件,才会形成明渠均匀流。

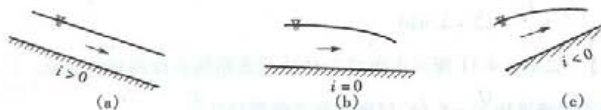


图 6.5-2

明渠均匀流流线为平行直线,过水断面的形状、水深、断面平均流速等均沿程不发生变化,故总水头线、水面线和渠底线三线平行,也就是说,明渠均匀流的水力坡度 J 、测压管坡度 J_p 和渠道底坡 i 彼此相等,即

$$J = J_p = i \quad (6.5-3)$$

6.5.3 明渠均匀流的水力计算

明渠水流一般属于紊流粗糙区,其流速通常采用谢才公式 $v = C \sqrt{RJ}$,因明渠均匀流中, $J = i$,故

$$v = C \sqrt{Ri} \quad (6.5-4)$$

$$\text{则流量 } Q = Av = AC \sqrt{Ri} \quad (6.5-5)$$

式(6.5-4)和(6.5-5)为明渠均匀流基本公式,其中谢才系数 C 可按曼宁公式 6.3-22 或巴甫洛夫斯基公式 6.3-23 确定。

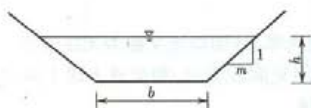


图 6.5-3

【例 6.5-1】 有一梯形断面的顺直小河,已知边坡系数 $m = 1.5$ (见图 6.5-3),渠底宽度 $b = 3$ m,底坡 $i = 0.005$,粗糙系数 $n = 0.030$,水深 $h = 0.8$ m,试求通过的流量 Q 。

解: 过水断面面积 $A = (b + mh)h = (3 + 1.5 \times 0.8) \times 0.8 = 3.36 \text{ m}^2$

$$\text{湿周 } \chi = b + 2 \sqrt{1 + m^2} h = 3 + 2 \sqrt{1 + 1.5^2} \times 0.8 = 5.88 \text{ m}$$

$$\text{水力半径 } R = \frac{A}{\chi} = \frac{3.36}{5.88} = 0.57 \text{ m}$$

$$\text{流量 } Q = AC \sqrt{Ri} = \frac{1}{n} AR^{\frac{2}{3}} i^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{0.030} \times 3.36 \times 0.57^{\frac{2}{3}} \times 0.005^{\frac{1}{2}} = 5.44 \text{ m}^3/\text{s}$$

明渠均匀流水力计算通常有求流量(Q)、底坡(i)、断面尺寸(b 和 h)几种类型。其中求断面尺寸问题,因有 b 和 h 两个未知量,尚需补充条件才能得到确定解。补充的途径一般有指定 b 求 h 或指定 h 求 b ,这两种情况因为超越方程,均需计算求解;再就是按水力最优概念补充条件。

6.5.4 水力最优断面

将曼宁公式 $C = \frac{1}{n} R^{\frac{1}{3}}$ 代入式 6.5-5 得

$$Q = \frac{1}{n} AR^{\frac{2}{3}} i^{\frac{1}{2}} = \frac{A^{\frac{5}{3}} i^{\frac{1}{2}}}{n \chi^{\frac{2}{3}}}$$

通常底坡 i 由地形条件确定,粗糙系数 n 取决于渠壁材料,故在此情况下渠道的输水能力 Q 只取决于断面的形状和尺寸。从设计角度考虑希望在 A, i, n 一定条件下,使设计出来的渠道通

过能力 $Q = Q_{\max}$, 相应的渠道断面称为水力最优断面。由上式可以看出, 满足上述条件的渠道, 必有其湿周 $\chi = \chi_{\min}$ 。故对于梯形断面渠道, 由 $A = (b + mh)h$ 和 $\chi = b + 2\sqrt{1+m^2}h$ 联立, 可得优化目标函数

$$\chi = \frac{A}{h} - mh + 2\sqrt{1+m^2}h$$

$$\text{令 } \frac{d\chi}{dh} = -\frac{A}{h^2} - m + 2\sqrt{1+m^2} = 0$$

可得水力最优梯形断面渠道的宽深比

$$\beta_h = \frac{b}{h} = 2(\sqrt{1+m^2} - m) \quad (6.5-6)$$

不难求得

$$R_h = \frac{h}{2} \quad (6.5-7)$$

即水力最优断面的水力半径等于水深的一半, 且与边坡系数无关。

对于矩形断面, 以 $m=0$ 代入式(6.5-6)得 $\beta_h = 2$, 即 $b=2h$, 水力最优矩形断面的底宽为水深的两倍。

水力最优断面概念仅是从流体力学的角度提出的, 故水力最优并不完全等同于“技术经济最优”。

【例 6.5-2】 试按水力最优条件设计一梯形断面渠道的尺寸。已知设计流量 $Q = 3.5 \text{ m}^3/\text{s}$, 底坡 $i = 0.005$, 边坡系数 $m = 1.5$, 渠壁粗糙系数 $n = 0.025$ 。

$$\text{解: } \beta_h = 2(\sqrt{1+1.5^2} - 1.5) = 0.61$$

$$\text{即 } b = 0.61h$$

$$A = (b + mh)h = (0.61h + 1.5h)h = 2.11h^2$$

$$\text{又 } R = R_h = 0.5h$$

将 Q, A, R, n, i 代入流量公式 $Q = \frac{1}{n}AR^{2/3}i^{1/2}$ 得

$$h = 0.97 \text{ m}$$

$$b = 0.61 \times 0.97 = 0.59 \text{ m}$$

6.5.5 无压圆管均匀流的水力计算

无压圆管是指不满流的圆管, 在城市排水工程中被广泛使用。对于 $i > 0$ 的长直无压圆管, 当粗糙系数 n 沿程保持不变时, 管中水流可以认为是明渠均匀流。

无压圆管均匀流的过流断面如图 6.5-4 所示。其水力要素间的关系如下:

$$\text{过水面积 } A = \frac{d^2}{8}(\theta - \sin \theta)$$

$$\text{湿周 } \chi = \frac{1}{2}\theta d$$

$$\text{水力半径 } R = \frac{d}{4}\left(1 - \frac{\sin \theta}{\theta}\right)$$

$$\text{充满度 } \alpha = \frac{h}{d} = \sin^2 \frac{\theta}{4}$$

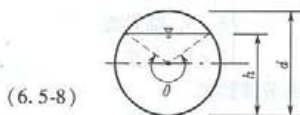


图 6.5-4

无压圆管均匀流基本公式仍为式(6.5-4)和式(6.5-5)。

实际工程中在进行无压管道的水力计算时,还要符合国家建设部颁发的《室外排水设计规范》中的有关规定。对于污水管道,为避免因管道承压使污水涌出排污口污染环境,应按不满流计算,其最大充满度按表 6.5-1 采用;对于雨水管道和合流管道,允许短时承压,应按满流计算。为防止排水管道发生冲刷和淤积,对最大流速和最小流速也做了规定。

表 6.5-1 最大设计充满度

管径 d /mm 或暗渠深 H /mm	最大设计充满度 α (h/d 或 h/H)
200 ~ 300	0.55
350 ~ 450	0.65
500 ~ 900	0.70
≥ 1000	0.75

【例 6.5-3】 已知某圆形污水管管径 $d=800$ mm,粗糙系数 $n=0.014$,底坡 $i=0.0024$,试求最大设计充满度时的流量 Q 。

解:由表 6.5-1 查得 $d=800$ mm 时的最大设计充满度为 $\alpha=0.70$,代入 $\alpha=\sin^2 \frac{\theta}{4}$ 得 $\theta=227.16^\circ$ 。则由式(6.5-8)得

$$A=0.3758 \text{ m}^2, X=1.586 \text{ m}, R=0.237 \text{ m}$$

$$\text{故 } Q = \frac{1}{n} AR^{\frac{2}{3}} i^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{0.014} \times 0.3758 \times 0.237^{\frac{2}{3}} \times 0.0024^{\frac{1}{2}} = 0.504 \text{ m}^3/\text{s}$$

6.5.6 明渠恒定非均匀流的流动状态

明渠均匀流形成的条件非常苛刻,只有在渠道底坡、渠壁粗糙系数沿程不变的长直顺坡棱柱形渠道中,才有可能形成均匀流,否则就是非均匀流。如果底坡度或渠壁糙率或渠底断面形式沿流程变化,渠道中设有桥、涵、堰等建筑物,都是破坏均匀流条件而造成非均匀流的因素。天然河流是典型的非均匀流动。

明渠水流有两种截然不同的流动状态。一种常见于底坡平缓的渠道或枯水季节的平原河流,水流徐缓,若遇暗礁孤石等水下障碍物阻水,障碍物前水面壅高,干扰影响能逆流上传至较远地方;另一种多见于山区和丘陵地区河流,水流湍急,若遇水下障碍物阻水,则水面仅在障碍物附近隆起,障碍物的干扰对上游来流无影响。前者称为缓流,后者称为急流。

明渠水流流动状态的判别有多种方法,但各种方法都是等价的。工程中常用的有临界水深法

$$\begin{cases} h > h_k, \text{缓流} \\ h = h_k, \text{临界流} \\ h < h_k, \text{急流} \end{cases} \quad (6.5-9)$$

和弗劳德数法

$$\begin{cases} Fr < 1, \text{缓流} \\ Fr = 1, \text{临界流} \\ Fr > 1, \text{急流} \end{cases} \quad (6.5-10)$$

式中 h, h_k 分别为渠道水深和相应的临界水深; $Fr = \sqrt{\alpha Q^2 B / (gA^3)}$ 称为弗劳德数,为无量纲

量。

6.6 渗流、井和集水廊道

要求:理解渗流模型和达西渗流定律;掌握集水廊道和单井产水量计算。

6.6.1 概述

流体在土壤、岩层等多孔介质中的流动称为渗流。渗流理论除了广泛应用于石油、水利、化工、地质、采矿、给水排水等领域外,土木工程中的路基排水、地下工程防水、桥梁及建筑工程的基础施工降水等,也将用到有关渗流知识。

水在土壤或岩石的孔隙中的存在状态有气态水、附着水、薄膜水、毛细水和重力水等。重力水在介质中的运动为重力作用的结果。本节研究重力水在多孔介质中的运动规律。

地下水的运动规律除与水的物理性质有关外,土壤的特性对水的渗透性质有很大的影响。土壤的特性主要取决于土壤的颗粒组成。对于均质各向同性土壤,渗透性质既与渗流空间的位置无关,也与渗流方向无关,本节主要讨论重力水在这种土壤中的恒定流动规律。

6.6.2 渗流基本定律

1. 渗流模型

自然土壤的颗粒形状和大小相差悬殊,颗粒间的孔隙形状、大小和分布很不规则,具有随机性质。因此要精确确定水在土壤孔隙中的流动状况是非常困难的,一般也无此必要。工程中所关注的是渗流的宏观平均效果,而不是孔隙内的流动细节。为此,在流体力学中,通常根据工程实际的需要,用着眼于主流方向的连续渗流代替实际复杂的渗流,这种虚拟的渗流,称为渗流模型。

2. 达西渗流定律

1856年法国工程师达西利用图6.6-1所示渗流实验装置,对沙质土壤进行了大量实验研究,得到了著名的达西定律:

$$v = k \frac{H}{l} = kJ \quad (6.6-1)$$

式中: $v = \frac{Q}{A}$ 为渗流的断面平均流速,这里 Q 为渗流流量, A 为与 v 的方向垂直的容器横截面积; k 为渗流系数,与土壤性质和流体性质等有关,具有流速的量纲; $J = H/l$ 为流程长度 l 范围内的平均测压管坡度,亦即水力坡度,为更具普遍性,可将其写成

微商形式 $J = -\frac{dH}{ds}$ 。

实践表明,达西渗流定律适用于雷诺数 $Re < 1 \sim 10$ 的渗流。

3. 渗流系数

渗流系数 k 是达西渗流定律中的重要参数。 k 值的确定正确与否直接关系到渗流计算结果的精确性。 k 值的大小一般与土壤本身的粒径大小、形状、分布情况以及水的温度等有关,因此要准确地确定其数值是比较困难的。常用的确定方法如下。

①经验公式法:根据土壤粒径大小、形状、结构、孔隙率和水温等参数所组成的经验公式估

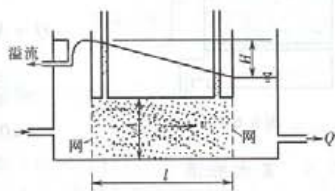


图 6.6-1

算 k 值。这类公式很多,一般可用作粗略估计。

②实验室方法:在实验室利用类似于图 6.6-1 所示的渗流实验装置,并通过式 6.6-1 计算 k 。此法简单,但往往因实验土样受到扰动而导致与实际土壤的 k 值有一定差别。

③现场方法:在现场利用钻井或原有井做抽水试验或灌水试验,根据井的产水量公式计算 k 。

作为近似,可采用表 6.6-1 中的 k 值。

表 6.6-1 渗流系数 k 的概值

土壤种类	渗流系数 $k/\text{cm} \cdot \text{s}^{-1}$	土壤种类	渗流系数 $k/\text{cm} \cdot \text{s}^{-1}$
黏土	6×10^{-6}	亚黏土	$6 \times 10^{-6} \sim 1 \times 10^{-4}$
黄土	$3 \times 10^{-4} \sim 6 \times 10^{-4}$	卵石	$1 \times 10^{-1} \sim 6 \times 10^{-1}$
细砂	$1 \times 10^{-2} \sim 6 \times 10^{-2}$	粗砂	$2 \times 10^{-2} \sim 6 \times 10^{-2}$

4. 裘皮幼公式

达西渗流定律 v 与 J 成线性关系,描述的是均匀渗流运动规律。裘皮幼为解决具有渐变渗流性质的集水井产水量计算问题,假定任一过水渐变渗流断面上各点的水力坡度 $J = -\frac{dH}{ds} = \text{常数}$,从而得出同一过水渐变渗流断面上各点流速 u 相等,当然也等于断面平均流速,即

$$v = u = kJ \quad (6.6-2)$$

上式称为裘皮幼公式,它是将达西定律推广到渐变流的渗流公式。

【例 6.6-1】如图 6.6-2 所示柱形滤水器,已知直径 $d = 1.2 \text{ m}$,滤层高 $l = 1.2 \text{ m}$,滤料渗流系数 $k = 0.01 \text{ cm/s}$,试求 $H = 0.6 \text{ m}$ 时的渗流流量 Q 。

$$\text{解: } J = \frac{H+l}{l} = \frac{0.6+1.2}{1.2} = 1.5$$

$$\begin{aligned} Q &= Av = \frac{\pi}{4} d^2 k J \\ &= \frac{\pi}{4} \times 1.2^2 \times 0.01 \times 10^{-2} \times 1.5 = 1.696 \times 10^{-4} \text{ m}^3/\text{s} \\ &= 0.1696 \text{ L/s} \end{aligned}$$

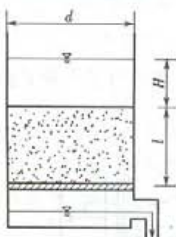


图 6.6-2

6.6.3 集水廊道

设有一矩形断面的集水廊道,如图 6.6-3 所示,廊道底位于水平不透水层上。将裘皮幼公式代入连续性方程得

$$Q = Av = -bzk \frac{dz}{ds}$$

设 $q = \frac{Q}{b}$ 为集水廊道单位长度上自一侧渗入的单宽流量,并考虑到在 xOz 坐标系中,流向 s 与 x 坐标相反,则上式可以写成

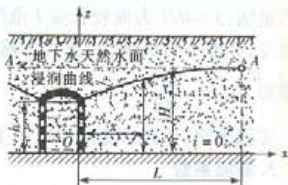


图 6.6-3

$$q = kz \frac{dz}{dx}$$

将上式分离变量并积分

$$q \int_0^l dx = k \int_h^H z dz$$

得集水廊道单侧单宽渗流量为

$$q = \frac{k(H^2 - h^2)}{2l} \quad (6.6-3)$$

式中 l 称为影响范围, 在 $x \geq l$ 的地区天然地下水位不受廊道的影响; H 为天然地下水位, 即含水层厚度; h 为廊道中水深。

6.6.4 单井

1. 潜水井

在具有自由水面的无压含水层中修建的井称为潜水井, 可以用来汲取无压地下水。若井底深达不透水层, 如图 6.6-4 所示, 称为完全井, 否则称为不完全井。

设潜水完全井的含水层厚度为 H , 井的半径为 r_0 。因抽水时, 地下水从井周轴向对称地流入井中, 建立图示 rOz 坐标系较为方便。过流断面为圆柱面, $A = 2\pi rz$, 流速 $v = kJ = k \frac{dz}{dr}$, 故流量 $Q = Av = 2\pi rz \cdot k$

$\frac{dz}{dr}$, 分离变量并积分

$$Q \int_{r_0}^R \frac{dr}{r} = 2\pi k \int_h^H z dz$$

得潜水完全井产水量公式

$$Q = \pi k \frac{H^2 - h^2}{\ln \frac{R}{r_0}} \quad (6.6-4)$$

式中 R 称为井的影响半径, 可由抽水试验测定, 近似计算时可用经验公式

$$R = 3000S\sqrt{k} \quad (6.6-5)$$

估算, 式中 $S = H - h$ 为井中水位降深, 以 m 计; 渗流系数 k 以 m/s 计。

【例 6.6-2】 有一潜水完全井, 已知含水层厚度 $H = 8$ m, 渗流系数 $k = 0.0015$ m/s, 井的半径 $r_0 = 0.5$ m, 抽水时井中水深 $h = 5$ m, 试估算井的产水量 Q 。

解: 井中水位降深 $S = H - h = 8 - 5 = 3$ m, 代入式 (6.6-5) 得井的影响半径

$$R = 3000 \times 3 \times \sqrt{0.0015} = 348.6 \text{ m}$$

取 $R = 350$ m, 由式 (6.6-4) 求得井的产水量为

$$Q = \pi \times 0.0015 \times \frac{8^2 - 5^2}{\ln \frac{350}{0.5}} = 0.028 \text{ m}^3/\text{s}$$

2. 自流井

含水层位于两不透水层之间, 其中渗流所受的压强大于大气压强, 这样的含水层称为自流

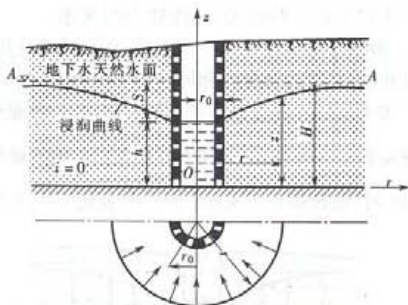


图 6.6-4

层,由自流层供水的井称为自流井,如图 6.6-5 所示。

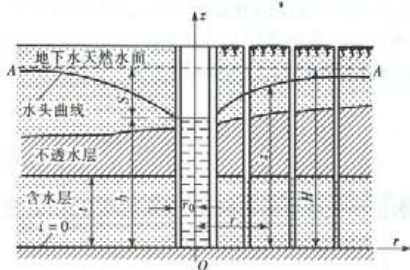


图 6.6-5

3. 大口井与基坑排水

大口井是井径较大、井深较小的集水井,一般用于集取浅层地下水,且为产水量来自井壁和井底的不完全井。基坑排水的性质与大口井相似,计算方法基本相同。

关于大口井的渗流形式有两种假定,一种是假定过流断面为半球面(见图 6.6-6(a)),另一种是假定为椭球面(见图 6.6-6(b))。前者适用于含水层厚度较大的情况,实践证明当 $\frac{H}{r_0} > 8 \sim 10$ 时,比较接近于实际。后一种假定适用于含水层厚度较小的情况。

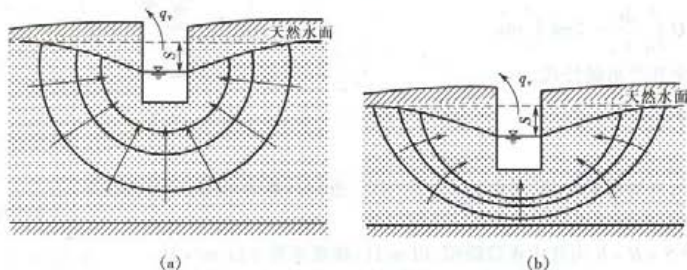


图 6.6-6

当渗流过流断面为半球面时,其产水量公式为

$$Q = 2\pi kr_0 S \quad (6.6-7)$$

当过流断面为椭球面时,

$$Q = 4kr_0 S \quad (6.6-8)$$

6.7 相似原理和量纲分析

要求:理解相似原理和量纲分析有关基本概念;掌握 π 定理量纲分析方法;掌握模型实验设计方法。

实际工程中的许多流体力学问题,由于其固有的复杂性,若仅用理论分析方法求解,一般很难得到完整的结果。实验分析方法是研究流体力学的重要方法之一。由于工程中实物原型的尺寸一般较大(尤其是土建工程中的建筑物),直接进行实验会耗费大量的人力和物力,因此人们往往采用模型进行实验研究。

要进行模型实验,就会遇到诸如:如何更有效地设计和组织实验,如何正确处理实验数据,以及如何将模型实验结果推广到原型等一系列问题。本节阐述的相似原理和量纲分析知识就是为这些问题的解决提供理论依据。

6.7.1 流动相似的基本概念

流动相似概念是几何学中的几何相似概念的推广。要使模型和原型的流动相似,除要求两者满足几何相似外,还要满足运动相似、动力相似以及定解条件(包括边界条件和初始条件)相似。

为便于理解和掌握相似的基本概念,定义 $\lambda_q = \frac{q_p}{q_m}$ 表示原型(p)与模型(m)对应物理量 q 的比例,称为比尺。

1. 几何相似

几何相似即形状相似,要求原型和模型对应的线性尺度成一定的比例。因此,两个几何相似物体的长度(l)、面积(A)、体积(V)比尺可分别表示为

$$\lambda_l = \frac{l_p}{l_m}$$

$$\lambda_A = \frac{A_p}{A_m} = \lambda_l^2$$

$$\lambda_V = \frac{V_p}{V_m} = \lambda_l^3$$

完善的几何相似,要求原型和模型两者的表面粗糙度之比也应等于 λ_l ,实际中有时很难做到。

2. 运动相似

运动相似是指流体运动的流速场相似,即要求原型和模型流动各对应点的流速方向相同、大小成一定的比例。因此两个运动相似物体的流速(u 或 v)、加速度(a)比尺可分别表示为

$$\lambda_u = \lambda_v = \frac{u_p}{u_m}$$

$$\lambda_a = \frac{a_p}{a_m} = \frac{\lambda_u^2}{\lambda_l^2}$$

3. 动力相似

动力相似是指原型和模型所受的同名力方向相同、大小成一定的比例。如图 6.7-1 所示流经飞机机翼流体的流场,假定作用在原型和模型流体质点上的同名力有重力 F_G 、压力 F_p 、黏性力 F_r 、惯性力 F_i 等,则两流动动力相似就要求:

$$\frac{F_{Gp}}{F_{Gm}} = \frac{F_{pp}}{F_{pm}} = \frac{F_{rp}}{F_{rm}} = \frac{F_{ip}}{F_{im}}$$

或写成比尺形式有

$$\lambda_{F_C} = \lambda_{F_P} = \lambda_{F_T} = \lambda_{F_I}$$

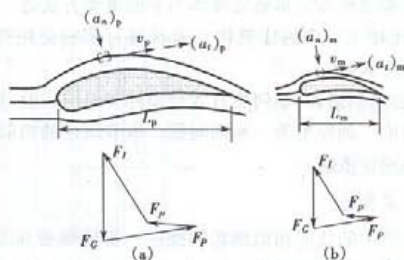


图 6.7-1

一般说来,几何相似是运动相似和动力相似的前提,动力相似是决定两流动相似的主导因素,运动相似是几何相似和动力相似的表现。因此,在几何相似前提下,要保证流动相似主要看动力相似。

6.7.2 相似准则

几何相似、运动相似、动力相似之间是有一定联系的,这种联系就是相似准则。其实流动相似的本质就是原型和模型能被同一物理方程所描述,这种思想可以推广到任意两个物理现象的相似,如水电相似、热电相似等。

推导相似准则可以从牛顿运动定律 $\Sigma F = ma$ 出发,即把惯性力作为标准,将其与其他作用力进行比较。

为便于相似准则的推导,现将常见作用力的比尺用基本比尺表示:

$$\text{重力比尺: } \lambda_{F_C} = \frac{(\rho g V)_p}{(\rho g V)_m} = \lambda_\rho \lambda_g \lambda_l^3 \quad (6.7-1)$$

$$\text{压力比尺: } \lambda_{F_P} = \frac{(\rho A)_p}{(\rho A)_m} = \lambda_\rho \lambda_l^2 \quad (6.7-2)$$

$$\text{黏性力比尺: } \lambda_{F_T} = \frac{\left(\frac{A\mu du}{dy}\right)_p}{\left(\frac{A\mu du}{dy}\right)_m} = \lambda_\mu \lambda_l \lambda_v \quad (6.7-3)$$

$$\text{惯性力比尺: } \lambda_{F_I} = \frac{(\rho Va)_p}{(\rho Va)_m} = \lambda_\rho \lambda_l^3 \lambda_a = \lambda_\rho \lambda_l^2 \lambda_v^2 \quad (6.7-4)$$

1. 弗劳德准则——重力相似

若保证原、模型任意对应点的重力相似,则由动力相似要求有

$$\lambda_{F_C} = \lambda_{F_I}$$

将式(6.7-1)和式(6.7-4)代入,化简得

$$\frac{\lambda_v}{\sqrt{\lambda_\rho \lambda_l}} = 1 \quad (6.7-5)$$

上式也可写成 $\left(\frac{v}{\sqrt{gl}}\right)_p = \left(\frac{v}{\sqrt{gl}}\right)_m$ 或 $(Fr)_p = (Fr)_m$, 即原型和模型的弗劳德数相等,这就是弗劳

德准则。

2. 雷诺准则——黏性力相似

若保证原、模型黏性力相似,则由动力相似要求有

$$\lambda_{F_T} = \lambda_{F_f}$$

将式(6.7-3)和式(6.7-4)代入,化简得

$$\frac{\lambda_\rho \lambda_v \lambda_l}{\lambda_\mu} = 1 \quad (6.7-6)$$

上式也可写成 $\left(\frac{\rho v l}{\mu}\right)_p = \left(\frac{\rho v l}{\mu}\right)_m$ 或 $(Re)_p = (Re)_m$,即原型和模型的雷诺数相等,这就是雷诺准则。

3. 欧拉准则——压力相似

保证原、模型压力相似,则由动力相似要求有

$$\lambda_{F_p} = \lambda_{F_f}$$

将式(6.7-2)和式(6.7-4)代入并化简得

$$\frac{\lambda_p}{\lambda_\rho \lambda_v^2} = 1 \quad (6.7-7)$$

上式也可写成 $\left(\frac{p}{\rho v^2}\right)_p = \left(\frac{p}{\rho v^2}\right)_m$ 或 $(Eu)_p = (Eu)_m$,即原型和模型的欧拉数相等,这就是欧拉准则。

6.7.3 相似原理的应用

1. 模型律的选择

模型设计首先要选择模型律,即确定所要遵循的相似准则。从理论上讲,流动相似应要求所有作用力都相似。

现仅就同时满足黏性力和重力相似进行讨论。由式(6.7-5)和式(6.7-6)得相似条件 $\lambda_\nu = \frac{\lambda_\mu}{\lambda_\rho} = \lambda_g \frac{1}{2} \lambda_l^{\frac{3}{2}} = \lambda_l^{\frac{3}{2}}$,也就是说,要保证黏性力和重力同时相似,须按 $\lambda_\nu = \lambda_l^{\frac{3}{2}}$ 选择模型流体的运动黏度,这通常难以实现;假若模型与原型采用同一介质, $\lambda_\nu = 1$,则得相似条件 $\lambda_l = 1$,即模型与原型尺寸相同,失去了模型实验的价值。

由此可见,一般情况下同时满足两个或两个以上作用力相似是很难实现的。实际应用中,通常只保证主要力相似。对于有压管流、潜体绕流等,一般为黏性力起主要作用,相似条件依赖于雷诺准则;对于明渠水流、绕桥墩的水流、自由式孔口出流等,主要受重力影响,相似条件依赖于弗劳德准则。

2. 模型设计

通常按试验场地和模型制作条件先定出长度比尺 λ_l ,确定模型流动的几何边界。然后选择模型流动的介质和相似准则,并按选定的相似准则确定流速比尺 λ_v 和计算模型流量。

【例 6.7-1】 有一直径 $d_p = 200$ mm 的输油管道,油的运动黏度 $\nu_p = 4.0 \times 10^{-5}$ m²/s,管内通过的流量 $Q_p = 0.12$ m³/s,若用直径 $d_m = 50$ mm 的管道和 20℃ 的空气($\nu_m = 14.9 \times 10^{-6}$ m²/s)作模型试验,试求在流动相似时模型管内的流量 Q_m 。

解:长度比尺 $\lambda_l = \frac{d_p}{d_m} = \frac{200}{50} = 4$

$$\text{运动黏度比尺 } \lambda_\nu = \frac{\nu_p}{\nu_m} = \frac{4.0 \times 10^{-5}}{14.9 \times 10^{-6}} = 2.685$$

$$\text{由雷诺准则确定流速比尺 } \lambda_v = \frac{\lambda_\nu}{\lambda_l} = \frac{2.685}{4} = 0.671$$

$$\text{模型管内流量 } Q_m = \frac{Q_p}{\lambda_l^2 \lambda_v} = \frac{120}{4^2 \times 0.671} = 11.18 \text{ L/s}$$

6.7.4 量纲分析

1. 量纲和量纲的齐次性

量纲是物理量的单位种类。同一物理量,可以用不同的单位来度量,但只有唯一的量纲,如长度可以用米、厘米、英尺、英寸等不同单位度量,但作为物理量的种类,它属于长度量纲 L。其他物理量如时间、速度、密度、力等也各属一种量纲。具有独立性的量纲称为基本量纲。在流体力学中,常用长度量纲 L、时间量纲 T、质量量纲 M 作为基本量纲,其他物理量的量纲都可由 3 个基本量纲来表示,如流速 $\dim v = \text{LT}^{-1}$ 、力 $\dim F = \text{MLT}^{-2}$ 。力学上任何有物理意义的方程式或关系式,各项的量纲必须相同,如流体静力学基本方程 $z + \frac{p}{\rho g} = C$,各项量纲均为 L,物理方程的这种性质称为量纲齐次性规律。一个量纲齐次性方程,可以化为无量纲方程,只要用方程中任一项除以其他各项即可,化为无量纲方程后,方程的函数关系并不改变。

2. 量纲分析法

量纲分析法的基本思想是首先假定一个未知的函数关系,然后运用物理方程量纲齐次性规律确定这个函数关系。下面介绍量纲分析通用的方法——布金汉 π 定理。

布金汉 π 定理指出:对于某个物理现象,如果存在 n 个变量互为函数关系,即 $F(q_1, q_2, \dots, q_n) = 0$,其中含有 m 个基本量,则可将 n 个变量组合成 $(n-m)$ 个无量纲数的函数关系,即

$$\varphi(\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_{n-m}) = 0$$

式中 $\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_{n-m}$ 等称为 π 数,即无量纲数。

基本量必须彼此互相独立,在流体力学中通常选 3 个。

【例 6.7-2】 已知在黏性流体中运动的球形物体所受阻力 F_p 与球体的直径 d 和运动速度 v 、流体的密度 ρ 和黏度 μ 有关,试用 π 定理建立 F_p 的公式。

解:将函数关系设为

$$F(v, d, \rho, \mu, F_p) = 0$$

其中变量 $n=5$,选取 v, d, ρ 为基本量,根据 π 定理,上式可变为

$$\varphi(\pi_1, \pi_2) = 0$$

其中 $\pi_1 = v^{\alpha_1} \cdot d^{\beta_1} \cdot \rho^{\gamma_1} \cdot \mu$, $\pi_2 = v^{\alpha_2} \cdot d^{\beta_2} \cdot \rho^{\gamma_2} \cdot F_p$ 。

为了确定指数 α, β, γ ,将 π_1, π_2 写成量纲方程。对于 π_1 有

$$\text{M}^0 \text{L}^0 \text{T}^0 = (\text{LT}^{-1})^{\alpha_1} \cdot \text{L}^{\beta_1} \cdot (\text{ML}^{-3})^{\gamma_1} \cdot (\text{ML}^{-1} \text{T}^{-1})$$

比较等式两边的同名量纲,有

$$\text{M}: 0 = \gamma_1 + 1$$

$$\text{L}: 0 = \alpha_1 + \beta_1 - 3\gamma_1 - 1$$

$$\text{T}: 0 = -\alpha_1 - 1$$

解得 $\alpha_1 = -1, \beta_1 = -1, \gamma_1 = -1$ 即 $\pi_1 = \frac{\mu}{\rho v d} = \frac{1}{Re}$, 同理可得

$$\pi_2 = \frac{F_D}{\rho d^2 v^2}$$

将 $\pi_1 = \frac{1}{Re}, \pi_2 = \frac{F_D}{\rho d^2 v^2}$ 代入 $\varphi(\pi_1, \pi_2) = 0$, 并将 F_D 解出, 得

$$F_D = f(Re) \rho d^2 v^2$$

式中 $f(Re)$ 为与雷诺数有关的系数, 可通过实验确定。

仿真习题

6.1 流体的主要物性与流体静力学

6-1 在流体力学中, 单位质量力是指作用在单位()流体上的质量力。

(A) 面积 (B) 体积 (C) 质量 (D) 重量

6-2 下面关于流体黏性的说法中, 正确的是()。

(A) 流体的黏性随温度的升高而减小

(B) 流体的黏性随温度的升高而增大

(C) 液体的黏性随温度的升高而增大, 而气体的黏性随温度的升高而减小

(D) 液体的黏性随温度的升高而减小, 而气体的黏性随温度的升高而增大

6-3 已知某流体的密度 $\rho = 1\ 000\ \text{kg/m}^3$, 动力黏度 $\mu = 0.1\ \text{Pa} \cdot \text{s}$, 则该流体的运动黏度 ν = ()。

(A) $0.1 \times 10^{-3}\ \text{m}^2/\text{s}$

(B) $0.1 \times 10^3\ \text{m}^2/\text{s}$

(C) $0.1 \times 10^{-3}\ \text{s/m}^2$

(D) $0.1 \times 10^3\ \text{s/m}^2$

6-4 已知某液体的密度变化率 $\frac{d\rho}{\rho} = 1.0\%$, 则该液体的体积变化率 $\frac{dV}{V} =$ ()。

(A) 1.0%

(B) -1.0%

(C) 1.0‰

(D) -1.0‰

6-5 已知某流体的黏性切应力 $\tau = 5.0\ \text{N/m}^2$, 动力黏度 $\mu = 0.1\ \text{Pa} \cdot \text{s}$, 则该流体的剪切变形速率 $\frac{du}{dy} =$ ()。

(A) 5.0 1/s

(B) 50 1/s

(C) 5.0 m/s

(D) 50 m/s

6-6 相对压强的起量点为()。

(A) 绝对真空

(B) 标准大气压

(C) 当地大气压

(D) 液面压强

6-7 重力作用下的流体静压强微分方程为 $dp =$ ()。

(A) $-\rho g dz$

(B) $\rho g dz$

(C) $-\rho dz$

(D) ρdz

6-8 图示封闭盛水容器壁上装有一 U 形水银测压计, 若 $x-x$ 为水平面, 则 1、2、3 点压强关系为()。

(A) $p_1 < p_2 < p_3$

(B) $p_1 = p_2 = p_3$

(C) $p_1 > p_2 > p_3$

(D) $p_2 < p_1 < p_3$

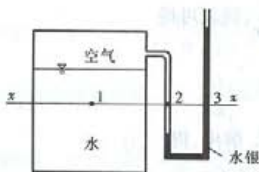
6-9 图示水箱液面上真空表读数为 19.6 kPa, 则水深 2 m 的底面上表压强为()。

(A) 39.2 kPa

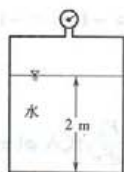
(B) 19.6 kPa

(C) 9.8 kPa

(D) 0



题 6-8 图



题 6-9 图

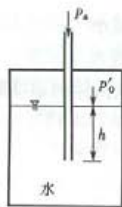
6-10 图示封闭盛水容器的水面绝对压强 $p_0' = 85 \text{ kPa}$, 中间玻璃管两端开口, 试问当既无空气通过玻璃管进入容器又无水进入玻璃管时, 玻璃管应伸入水中的深度 $h = (\quad)$ m。

- (A) 0.85 (B) 1.33 (C) 8.5 (D) 13.3

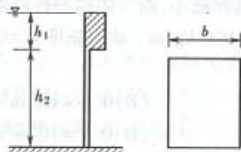
6-11 一铅直矩形闸门如图所示, 已知 $h_1 = 1 \text{ m}$, $h_2 = 2 \text{ m}$, $b = 1.5 \text{ m}$, 则作用在闸门上的静水总压力 $P = (\quad)$ kN。

- (A) 98.8 (B) 78.8 (C) 68.8 (D) 58.8

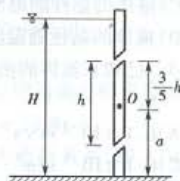
6-12 图示矩形闸门, 已知 a 及 h , 当 (\quad) 时, 闸门可绕 O 轴自动打开。



题 6-10 图



题 6-11 图

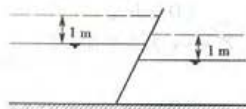


题 6-12 图

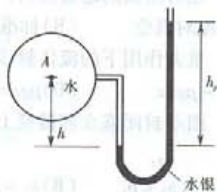
- (A) $H > a + \frac{14}{15}h$ (B) $H < a + \frac{14}{15}h$ (C) $H > a + \frac{15}{14}h$ (D) $H < a + \frac{15}{14}h$

6-13 有一倾斜放置的平面闸门, 当上下游水位都上升 1 m 时(虚线位置), 闸门上的静水总压力 (\quad) 。

- (A) 变大 (B) 变小 (C) 不变 (D) 无法确定



题 6-13 图



题 6-14 图

6-14 用图示 U 形水银测压计测 A 点压强, 已知 $h_p = 500 \text{ mm}$, $h = 300 \text{ mm}$, 则 A 点的相对压强为 (\quad) N/m^2 。

- (A) 6 500 (B) 63 700 (C) 35 084 (D) 1 960

6.2 流体动力学基础

6-15 过流断面是指与()的断面。

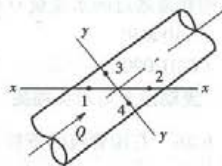
- (A) 流线平行 (B) 流线斜交 (C) 流线正交 (D) 迹线正交

6-16 渐变流过流断面上各点的()近似等于常数。

- (A) p (B) $z + \frac{p}{\rho g}$ (C) $\frac{p}{\rho g} + \frac{u^2}{2g}$ (D) $z + \frac{p}{\rho g} + \frac{u^2}{2g}$

6-17 图示等径长直管流, $x-x$ 为水平面, $y-y$ 过流断面, 则有()。

- (A) $p_1 = p_2$ (B) $p_3 = p_4$
 (C) $z_3 + \frac{p_3}{\rho g} > z_4 + \frac{p_4}{\rho g}$ (D) $z_3 + \frac{p_3}{\rho g} = z_4 + \frac{p_4}{\rho g}$



题 6-17 图

6-18 已知突扩前后管段的管径之比 $\frac{d_1}{d_2} = 0.5$, 则突扩前后

断面平均流速之比 $\frac{v_1}{v_2} = ()$ 。

- (A) 4 (B) 2 (C) 1 (D) 0.5

6-19 黏性流体总流的总水头线一般为()。

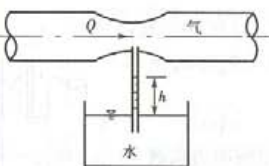
- (A) 沿程上升的曲线 (B) 沿程下降的曲线
 (C) 沿程不变的水平线 (D) 前 3 种情况都有可能

6-20 关于水流流向的正确说法是()。

- (A) 水一定是从高处向低处流
 (B) 水一定是从流速大处向流速小处流
 (C) 水一定是从压强高处向压强小处流
 (D) 水一定是从机械能大处向机械能小处流

6-21 已知三通管来流流量 $Q_1 = 140 \text{ L/s}$, 两支管的直径 $d_2 = 150 \text{ mm}$ 和 $d_3 = 200 \text{ mm}$, 且两管断面平均流速相等 ($v_2 = v_3$), 则两支管流量()。

- (A) $Q_2 = 40 \text{ L/s}, Q_3 = 100 \text{ L/s}$ (B) $Q_2 = 50.3 \text{ L/s}, Q_3 = 89.7 \text{ L/s}$
 (C) $Q_2 = 60 \text{ L/s}, Q_3 = 80 \text{ L/s}$ (D) $Q_2 = Q_3 = 70 \text{ L/s}$



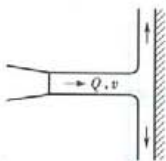
题 6-22 图

6-22 图示输气管在喉道处用一玻璃管与盛水容器相连, 已知玻璃管内水上升高度为 h , 则输气管喉道断面的相对压强 $p = ()$ 。

- (A) $\rho_{\text{水}} gh$ (B) $\rho_{\text{气}} gh$
 (C) $-\rho_{\text{水}} gh$ (D) $-\rho_{\text{气}} gh$

6-23 在应用恒定总流的动量方程 $\Sigma F = \rho Q (\beta_2 v_2 - \beta_1 v_1)$ 解题时, ΣF 中不应包括()。

- (A) 重力 (B) 压力 (C) 阻力 (D) 惯性力



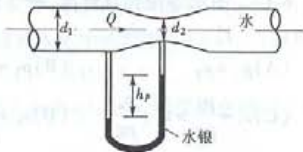
题 6-24 图

6-24 如图所示,水由喷嘴水平射出,冲击在固定的光滑平板上,已知喷出速度 $v = 50 \text{ m/s}$,喷射流量 $Q = 400 \text{ L/s}$,若不计空气及平板对射流的阻力,则射流对平板的冲击力为()kN。

- (A) 20 (B) 40
(C) 65 (D) 120

6-25 如图所示文丘里管,已知管道直径 $d_1 = 100 \text{ mm}$,喉道直径 $d_2 = 50 \text{ mm}$,文丘里流量计流量系数 $\mu = 0.94$,水银差压计读数 $h_p = 25 \text{ cm}$,则管道通过的水流量 $Q = () \text{ m}^3/\text{s}$ 。

- (A) 0.030 (B) 0.025
(C) 0.020 (D) 0.015

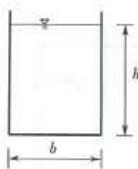


题 6-25 图

6.3 流动阻力与水头损失

6-26 有压管流的管径 d 与水力半径 R 之比 $\frac{d}{R} =$

- ()。
- (A) 4 (B) 2
(C) 1 (D) 0.5



题 6-27 图

6-27 图示矩形明渠断面的水力半径 $R = ()$ 。

- (A) $\frac{b+2h}{bh}$ (B) $\frac{bh}{b+2h}$
(C) $\frac{2(b+h)}{bh}$ (D) $\frac{bh}{2(b+h)}$

6-28 已知有压管路中突扩前后管段管径之比 $\frac{d_1}{d_2} = 0.5$,则雷诺数之

比 $\frac{Re_1}{Re_2} = ()$ 。

- (A) 0.25 (B) 0.5 (C) 1.0 (D) 2.0

6-29 圆管层流中断面最大流速 u_{\max} 与平均流速 v 之比 $\frac{u_{\max}}{v} = ()$ 。

- (A) 0.5 (B) 1.0 (C) 2.0 (D) 4.0

6-30 若在同一长直等径管道中用不同液体进行实验,当流速相等时,其沿程水头损失 h_f 在()是相同的。

- (A) 层流区 (B) 紊流光滑区 (C) 紊流过渡区 (D) 紊流粗糙区

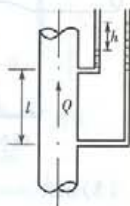
6-31 在图示等径直管流动中,相距 l 的两断面间的水头损失 $h_w =$

- ()。
- (A) h (B) $h-l$ (C) $h+l$ (D) l

6-32 已知某圆管水流的雷诺数 $Re = 2000$,则该管的沿程阻力系数 $\lambda = ()$ 。

- (A) 0.028 (B) 0.032 (C) 0.064 (D) 31.25

6-33 已知混凝土排水管($n = 0.014$)的水力半径 $R = 0.5 \text{ m}$,水均匀流动 1000 m 的沿程水头损失为 1 m ,则该管的断面平均流速 $v = ()$



题 6-31 图

- m/s。
- (A) 1.22 (B) 1.32 (C) 1.42 (D) 1.52

6-34 突然扩大管段的局部水头损失 $h_j = ()$ 。

- (A) $\frac{v_1 - v_2}{2g}$ (B) $\frac{(v_1 - v_2)^2}{2g}$ (C) $\frac{v_1^2 + v_2^2}{2g}$ (D) $\frac{v_1^2 - v_2^2}{2g}$

6-35 下列有关于流体流动减阻措施的说法中,不正确的是()。

- (A) 采用刚性边壁 (B) 采用柔性边壁
(C) 减小管壁粗糙度 (D) 投加极少量添加剂

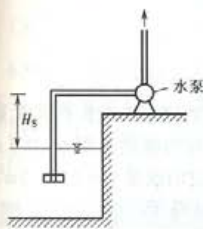
6.4 孔口、管嘴、管道流动

6-36 当孔口、管嘴出流的作用水头 H 和管(孔)径 d 分别相等时,则必有()。

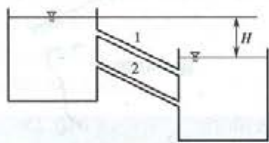
- (A) $Q_{孔口} > Q_{管嘴}, v_{孔口} > v_{管嘴}$ (B) $Q_{孔口} < Q_{管嘴}, v_{孔口} > v_{管嘴}$
(C) $Q_{孔口} > Q_{管嘴}, v_{孔口} < v_{管嘴}$ (D) $Q_{孔口} < Q_{管嘴}, v_{孔口} < v_{管嘴}$

6-37 水泵的吸水管装置如图所示,已知流量 $Q = 76 \text{ m}^3/\text{h}$,允许真空度 $[h_v] = 6.2 \text{ mH}_2\text{O}$,吸水管长 $l = 10 \text{ m}$,管径 $d = 150 \text{ mm}$,沿程阻力系数 $\lambda = 0.04$,局部阻力系数 $\xi_{底阀} = 5.5, \xi_{弯头} = 0.25$,则水泵允许安装高度 $H_s = () \text{ m}$ 。

- (A) 7.20 (B) 6.20 (C) 5.52 (D) 5.12



题 6-37 图



题 6-38 图

6-38 图示水面差为 H 的两水箱间并设两根等径等长的直长管,则两管的流量关系为()。

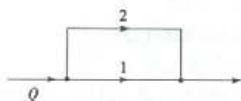
- (A) $\frac{Q_1}{Q_2} = 1$ (B) $\frac{Q_1}{Q_2} > 1$ (C) $\frac{Q_1}{Q_2} < 1$ (D) $\frac{Q_1}{Q_2} < 0$

6-39 图示并联管路,已知两支管的比阻比 $\frac{S_1}{S_2} = 1$,管长比 $\frac{l_1}{l_2} = \frac{1}{2}$,则两支管的流量比 $\frac{Q_1}{Q_2} = ()$ 。

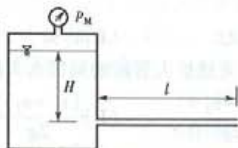
- (A) $\frac{1}{2}$ (B) $\sqrt{2}$ (C) $\sqrt{2}$ (D) 2

6-40 图示压力供水箱水位恒定,顶部压力表读数 $p_M = 19\ 600 \text{ Pa}$,水深 $H = 2 \text{ m}$,水平供水管长 $l = 100 \text{ m}$,管径 $d = 200 \text{ mm}$,沿程阻力系数 $\lambda = 0.02$,若忽略局部水头损失,则管道通过的流量 $Q = () \text{ L/s}$ 。

- (A) 47.4 (B) 59.3 (C) 83.8 (D) 196.5



题 6-39 图



题 6-40 图

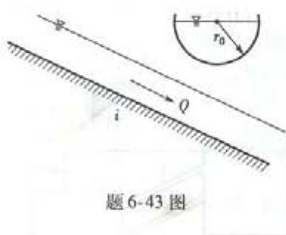
6.5 明渠恒定流

6-41 下列渠道中,可能产生均匀流的是()。

- (A) 平坡棱柱形渠道 (B) 逆坡棱柱形渠道
(C) 正坡棱柱形渠道 (D) 正坡非棱柱形渠道

6-42 欲使水力最优梯形断面渠道的水深和底宽相等,则渠道的边坡系数 m 应为()。

- (A) 1 (B) $\frac{3}{4}$ (C) $\frac{1}{2}$ (D) $\frac{1}{4}$



题 6-43 图

6-43 图示半圆形断面长直渠道,半径 $r_0 = 2$ m,底坡 $i = 0.0004$,渠壁粗糙系数 $n = 0.01$,则渠道的断面平均流速为() m/s。

- (A) 1 (B) 2
(C) 2.5 (D) 3

6-44 有一条养护良好的矩形断面长直渠道,底坡 $i = 0.0008$,底宽 $b = 1.0$ m,均匀流动水深 $h = 0.5$ m,粗糙系数 $n = 0.025$,则渠道通过的流量 $Q =$ () m^3/s 。

- (A) 0.10 (B) 0.15 (C) 0.23 (D) 0.35

6-45 矩形断面长直渠道通过流量 $Q = 5 \text{ m}^3/\text{s}$,渠壁粗糙系数 $n = 0.016$,底坡 $i = 0.001$,按水力最优断面设计,渠道底宽 b 应为() m。

- (A) 2.60 (B) 3.60 (C) 4.60 (D) 5.60

6.6 渗流、井和集水廊道

6-46 渗流是指流体在()中的流动。

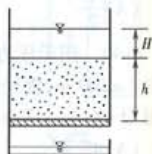
- (A) 集水廊道 (B) 地下河道 (C) 盲沟 (D) 多孔介质

6-47 达西渗流定律的适用条件为雷诺数 $Re = \frac{vd}{\nu} <$ ()。

- (A) 2300 (B) 1000 (C) 100 (D) 10

6-48 图示柱形过滤器直径为 d ,滤层高为 h ,渗流系数为 k ,当滤层上水深为 H 时,渗流流量 Q 为()。

- (A) $\frac{\pi}{4} d^2 k \frac{H}{h}$ (B) $\frac{\pi}{4} d^2 k \frac{H + \frac{h}{2}}{h}$



题 6-48 图

$$(C) \frac{\pi}{4} d^2 k \frac{H+h}{h} \quad (D) \frac{\pi}{4} d^2 k \frac{\frac{H}{2}+h}{h}$$

6-49 潜水完全井的产水量的大小与()成正比。

- (A) 井的半径
(B) 井的影响半径
(C) 含水层厚度
(D) 土壤渗流系数

6-50 自流完全井的产水量的大小与()成正比。

- (A) 井的半径
(B) 井的影响半径
(C) 含水层厚度
(D) 土壤渗流系数的平方

6.7 相似原理和量纲分析

6-51 在进行水力模型试验时,要实验明渠水流的动力相似,一般应选择()。

- (A) 弗劳德准则 (B) 雷诺准则 (C) 欧拉准则 (D) 马赫准则

6-52 在进行水力模型试验时,要实现有压管流的动力相似,一般应选择()。

- (A) 弗劳德准则 (B) 雷诺准则 (C) 欧拉准则 (D) 马赫准则

6-53 当水力模型按重力准则设计时,其流量比尺 $\lambda_Q = ()$ 。

- (A) $\lambda_l \lambda_v$ (B) $\lambda_l \lambda_g$ (C) $\lambda_l^{2.5} \lambda_g^{0.5}$ (D) λ_l

6-54 液体的弹性模量 E 、密度 ρ 和流速 v 可组成的无量纲数为()。

- (A) $\frac{Ev}{\rho}$ (B) $\frac{Ev^2}{\rho}$ (C) $\frac{\rho v}{E}$ (D) $\frac{\rho v^2}{E}$

6-55 一建筑物模型在风速为 8 m/s 时,迎风面压强为 45 Pa ,背风面压强为 -27 Pa ,若气温不变,风速增至 12 m/s ,则建筑物迎风面和背风面的压强分别为()。

- (A) 55.1 Pa 和 -33.1 Pa
(B) 67.5 Pa 和 -40.5 Pa
(C) 82.7 Pa 和 -49.6 Pa
(D) 101.3 Pa 和 -60.8 Pa

习题答案

- 6-1 (C) 6-2 (D) 6-3 (A) 6-4 (B) 6-5 (B) 6-6 (C)
 6-7 (A) 6-8 (C) 6-9 (D) 6-10 (B) 6-11 (D) 6-12 (A)
 6-13 (A) 6-14 (B) 6-15 (C) 6-16 (B) 6-17 (D) 6-18 (A)
 6-19 (B) 6-20 (D) 6-21 (B) 6-22 (C) 6-23 (D) 6-24 (A)
 6-25 (D) 6-26 (A) 6-27 (B) 6-28 (D) 6-29 (C) 6-30 (D)
 6-31 (A) 6-32 (B) 6-33 (C) 6-34 (B) 6-35 (A) 6-36 (B)
 6-37 (C) 6-38 (A) 6-39 (C) 6-40 (C) 6-41 (C) 6-42 (B)
 6-43 (B) 6-44 (C) 6-45 (A) 6-46 (D) 6-47 (D) 6-48 (C)
 6-49 (D) 6-50 (C) 6-51 (A) 6-52 (B) 6-53 (C) 6-54 (D)
 6-55 (D)

$$-\frac{1}{k} \frac{d^2 T}{dx^2} = \frac{q_0}{k} \left(1 - \frac{x}{L} \right)$$

边界条件：(1) 在 \$x=0\$ 处，\$T=T_0\$；(2) 在 \$x=L\$ 处，\$T=T_1\$。
 积分得：\$-\frac{1}{k} \frac{dT}{dx} = \frac{q_0}{k} \left(x - \frac{x^2}{L} \right) + C_1\$
 再积分得：\$-\frac{1}{k} T = \frac{q_0}{2k} \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3L} \right) + C_1 x + C_2\$

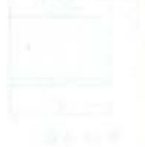
工程技术基础

第一章 绪论
 第一节 工程技术的定义
 第二节 工程技术的分类
 第三节 工程技术的性质
 第四节 工程技术的任务

第二章 力学基础
 第一节 静力学
 第二节 运动学
 第三节 动力学

参考答案

1. (A)	2. (B)	3. (C)	4. (D)	5. (A)	6. (B)	7. (C)	8. (D)
9. (A)	10. (B)	11. (C)	12. (D)	13. (A)	14. (B)	15. (C)	16. (D)
17. (A)	18. (B)	19. (C)	20. (D)	21. (A)	22. (B)	23. (C)	24. (D)
25. (A)	26. (B)	27. (C)	28. (D)	29. (A)	30. (B)	31. (C)	32. (D)
33. (A)	34. (B)	35. (C)	36. (D)	37. (A)	38. (B)	39. (C)	40. (D)
41. (A)	42. (B)	43. (C)	44. (D)	45. (A)	46. (B)	47. (C)	48. (D)
49. (A)	50. (B)	51. (C)	52. (D)	53. (A)	54. (B)	55. (C)	56. (D)
57. (A)	58. (B)	59. (C)	60. (D)	61. (A)	62. (B)	63. (C)	64. (D)
65. (A)	66. (B)	67. (C)	68. (D)	69. (A)	70. (B)	71. (C)	72. (D)
73. (A)	74. (B)	75. (C)	76. (D)	77. (A)	78. (B)	79. (C)	80. (D)
81. (A)	82. (B)	83. (C)	84. (D)	85. (A)	86. (B)	87. (C)	88. (D)
89. (A)	90. (B)	91. (C)	92. (D)	93. (A)	94. (B)	95. (C)	96. (D)
97. (A)	98. (B)	99. (C)	100. (D)	101. (A)	102. (B)	103. (C)	104. (D)



7 电工电子技术

考试大纲

7.1 电磁学概念

电荷与电场;库仑定律;高斯定律;电流与磁场;安培环路定律;电磁感应定律;洛仑兹力。

7.2 电路知识

电路组成;电路的基本物理过程;理想电路元件及其约束关系;电路模型;欧姆定律;基尔霍夫定律;支路电流法;等效电源定理;迭加原理;正弦电路稳态分析的相量法;交流电路功率;功率因数;三相配电路及用电安全;电路暂态; RL 、 RC 电路暂态特性;电路频率特性; RL 、 RC 电路频率特性。

7.3 电动机与变压器

理想变压器;变压器的电压变换、电流变换和阻抗变换原理;三相异步电动机接线、启动、反转及调速方法;三相异步电动机运行特性;简单继电—接触控制电路。

7.4 模拟电子技术

晶体二极管;双极型晶体三极管;共射极放大电路;输入阻抗与输出阻抗;射极跟随器与阻抗变换;运算放大器;反相运算放大电路;同相运算放大电路;基于运算放大电路的比较器电路;二极管单相半波整流电路;二极管单相桥式整流电路。

7.5 数字电子技术

“与”、“或”、“非”门的逻辑功能;简单组合逻辑电路;D 触发器;JK 触发器;数字寄存器;脉冲计数器。

复习指导

掌握电工电子技术中所涉及的基本理论、基本知识和基本技能,了解电工电子技术的应用和发展。复习内容要点如下。

(1) 电场和磁场中的库仑定律、高斯定理、安培环路定律、电磁感应定律和洛仑兹力是电

磁场理论中的基本内容,了解它们所描述的物理现象及其相关物理量的计算(注意应用条件)。

(2)电路中的元件约束和基尔霍夫定律(电流定律 KCL 和基尔霍夫电压定律 KVL)是分析、计算电路的基础;支路电流法、等效电源定理(戴维南定理和电源等效互换)及叠加原理是分析计算电路的主要方法,必须熟练掌握。正弦交流电路中电源的时域描述涉及幅值、频率、相位(称正弦量的三要素)。由于相位差的存在,在进行交流电路分析计算时必须借助相量或相量图完成。交流电路的分析计算包括有效值、(复数)阻抗、功率和功率因素等。三相电路问题分析针对三相对称电源情况下的对称负载电压、电流的计算。对于三相电路的安全用电需要掌握电源不同线制下的设备安全运行保护方式。由 RC 和 RL 电路的暂态过程分析掌握一阶电路三要素分析方法,理解三要素的内涵。 RL 、 RC 电路的频率特性包括幅频特性和相频特性,学会通过电路的传递函数分析电路的作用。

(3)电动机与变压器是电工技术的应用内容,重点掌握变压器的电压变换、电流变换和阻抗变换,三相异步电动机的接线、启动、反转、调速方法以及运行特性;同时学会继电器—接触器控制电路的分析。

(4)了解晶体二极管和极型三极管的工作特性,即晶体二极管的单向导电性,极型三极管的电流放大作用和开关特性。利用二极管的单向导电性,可以组成半波和全波(桥式)整流电路。极型三极管单管放大电路分析,包括静态工作点分析和动态分析,其中动态分析是根据小信号模型,利用电路中的定律完成电压放大倍数、输入电阻及输出电阻的计算。对于射极跟随器除了掌握上述放大电路分析内容外,还要了解它的阻抗变换作用。

(5)运算放大器是一个多级放大电路,其工作特性具有线性区域和非线性区域。理想运算放大器具有放大倍数无穷大、输入电阻无穷大和输出电阻为零的特点。利用理想运算放大器的线性特性可以组成各种运算电路,如比例、加法、减法、积分和微分运算等,利用理想运算放大器的非线性特性可以组成比较器电路。

(6)门电路和触发器是数字电子电路中的基本部件。门电路的输出、输入之间存在一定的逻辑关系,如基本“与”门、“或”门、“非”门分别具有“与”、“或”、“非”(取反)逻辑关系,通过它们的组合可以组成符合逻辑门,如“与非”门、“或非”门、“异或”门等,可以掌握由这些门搭建的组合逻辑电路分析问题。触发器的输出不但和输入有关,而且和触发器原来的状态有关,各种触发器在系统触发脉冲 CP 的作用下,具有不同的功能,如“复0”、“置1”功能,JK 触发器具有“复0”、“置1”、“计数”和“保存”功能,而 D 触发器只具有“存储”的功能。这部分内容需要掌握由 JK 触发器和 D 触发器搭建的寄存器、计数器电路的分析。

复习内容

7.1 电磁学概念

7.1.1 电荷与电场

摩擦起电,物体带有电荷,包括正电荷和负电荷。电荷所带电荷量为: $e=1.6 \times 10^{-19}$ C(库伦)。

电荷周围存在电场,静止电荷周围的电场为静电场,处在电场中的任何电荷都要受力,这

个力称为电场力。

7.1.2 库仑定律

1. 库仑定律

库仑定律的具体描述:真空中两个静止点电荷之间的相互作用力,与它们的电荷量的乘积成正比,与它们的距离的平方成反比,作用力的方向在它们的连线上。库仑定律的数学描述式为

$$F = K \frac{q_1 q_2}{r^2} \quad (7.1-1)$$

其中,静电力常数 $K = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} = 9.0 \times 10^9 \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{C}^2$ 与真空中的介电常数有关,

$$\epsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12} / \text{N} \cdot \text{m}^2.$$

值得注意的是:两个点电荷之间的作用力不因第三个点电荷的存在而有影响。

【例 7.1-1】如图 7.1-1 真空中的三个点电荷,它们在边长为 10 cm 的等边三角形的三个顶点上,每个点电荷的电量为 $2 \times 10^{-6} \text{ C}$,它们所受的库仑力各为多少?

解:点电荷 q_2 与 q_1 、 q_3 间的库仑力均为吸力,分别用 F_1 、 F_2 表示,由于它们所带电量相同,相互距离 10 cm,所以 q_1 、 q_3 所受的库仑力为

$$F_1 = F_2 = K \frac{q^2}{r^2} = 3.6 \text{ N}$$

q_1 所受库仑力为 F_1 、 F_2 的合力,即 $F = 2F_1 \cos 30^\circ = 6.24 \text{ N}$ 。

2. 电场强度

静止电荷产生的电场为静电场,它对电场中的其他电荷具有作用力。

电场的强弱以电场强度来度量,计算式如下:

$$E = \frac{F}{q} \quad (7.1-2)$$

式中的电场力 F 由库仑定律确定,而电量 q 是在该点做测试用的带电体所带正电荷的电量。电场中某点电场强度的大小等于单位正电荷在该点所受电场力的大小,它的方向与正电荷的受力方向相同。

电场强度的单位是: N/C , 即牛顿/库仑,通常还采用伏特/米,即 V/m 为单位,两者具有相同的量纲。

电场中各点电场强度的大小和方向用电场线描述。一个孤立点电荷周围的电场线在空间呈辐射状分布。对于正点电荷,其电场起始于正电荷,终止于无限远处;对于负点电荷,则电场起始于无限远处,终止于负电荷。一对正负电荷周围的电场分布起始于正电荷,终止于负电荷。电场线在电场中不相交。

7.1.3 高斯定律

高斯定律从另一种角度给出电荷与电场的关系,即静电场对任意封闭曲面的电通量只与被包围该曲面内的电量有关。高斯定律的数学表述形式为

$$\Phi = \oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{1}{\epsilon_0} \sum_{i=1}^n q_i \quad (7.1-3)$$

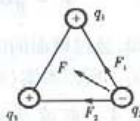


图 7.1-1 例 7.1-1 图

式中, $\oiint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S}$ 为通过任意闭合曲面 S 的电通量, 用 Φ 表示, 它等于该闭合曲面所包围的所有电荷的代数和 $\sum_{i=1}^n q_i$ 与真空中介电常数 ϵ_0 的比。

应用高斯定律需要注意两点: ①定律中的场强 E 是由全部电荷产生的; ②通过闭合曲面的电通量只决定于它所包含的电荷, 闭合曲面外的电荷对电通量无贡献。

电通量的引入是高斯的重要贡献, 它是电场、磁场、电磁场以及其他场问题研究中的一个重要概念。

【例 7.1-2】 电场中有个闭合球面, 球面所包围的电荷电量为 $+q_1$, 球面外电荷的电量为 $-q_2$, 则通过该球面的电通量 Φ 是()。

$$(A) \Phi = \frac{1}{\epsilon_0}(q_1 + q_2) \quad (B) \Phi = \frac{1}{\epsilon_0}(q_1 - q_2) \quad (C) \Phi = \frac{1}{\epsilon_0}q_1 \quad (D) \Phi = -\frac{1}{\epsilon_0}q_2$$

解: 答案为选项(C)。

根据高斯定理

$$\Phi = \oiint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{1}{\epsilon_0} \sum_{i=1}^n q_i$$

可知, 通过球面的电通量等于它所包围电量的代数和与真空介电常数的商, 而与球面外的电荷无关。所以答案(C)正确。

7.1.4 电流与磁场

1. 电流

由于电场的作用, 导体中的电荷作定向运动, 电荷的这种定向流动形成电流。电学中, 电流的方向规定为正电荷流动的方向, 电流的强弱以单位时间内通过导体横截面的电荷总量即电荷的流量来度量, 称为电流强度, 简称电流, 通常用符号 I 来表示, 数学描述式为

$$I = \frac{q_s}{t} \quad (7.1-4)$$

电流强度的单位是安培(A), $1 \text{ A} = 1 \text{ C} \cdot \text{s}^{-1}$ 。

2. 磁场

运动的电荷(电流)产生磁场, 磁场中的磁针会因受力而发生偏转, 这种力称为磁力。同名磁极相互排斥, 异名磁极相互吸引。

磁场的强弱以单位磁针在磁场中受力的大小来度量, 称为磁感应强度, 用 B 来表示, 它的单位是特斯拉(T), $1 \text{ T} = 1 \text{ N} \cdot \text{A}^{-1} \cdot \text{m}^{-1}$ 。磁感应强度也用高斯(G)做单位, $1 \text{ T} = 10^4 \text{ G}$ 。电学中将小磁针静止时 N 极所指的方向规定为该电流的磁感应强度的方向, 用磁感线描述磁感应强度方向。

磁场与电流有关。对于直线电流的磁场方向可以通过安培定则(右手定则)表示, 即右手握住导线, 伸直的拇指与电流方向一致, 则弯曲的四指指向即为磁场的方向, 如图 7.1-2(a), 磁感应强度为

$$B = \frac{\mu I}{2\pi r} \quad (7.1-5)$$

对于环形电流, 如线圈(如图 7.1-2(b)), 让右手弯曲的四指与环形电流方向一致, 则伸开

的拇指所指方向就是磁场的方向。

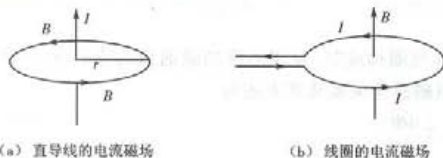


图 7.1-2 电流与磁场的方向关系

【例 7.1-3】如图 7.1-3 所示, $MO=ON$, 若 $I_1=I_2$, 则原点 O 处的磁感应强度为()。

(A) $B = \frac{2\mu_0}{2\pi r} \cdot I$

(B) $B = 2\pi r \cdot \mu_0 I$

(C) $B = \frac{\mu_0}{2\pi r} \cdot I$

(D) $B = 0$

解: 答案为选项(D)。

由于 $I_1=I_2$, 所以, 根据式(7.1-5)可知: 它们所产生的电磁感应强度大小相等, 方向相反 (I_1 电流产生的磁感应强度方向与 x 轴方向相反, I_2 电流产生的磁感应强度方向与 x 轴方向相同), 因此, 原点 O 处的磁感应强度 $B=0$ 。

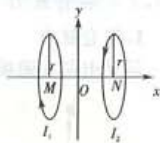


图 7.1-3 例 7.1-3 图

7.1.5 安培环路定律

安培环路定律给出了磁场中磁场强度 H 和电流 I 的关系。它的表述形式为

$$\oint_l \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \sum I \quad (7.1-6)$$

它说明, 磁场强度 H 沿磁场中任意一个闭合曲线的线积分等于穿过闭合曲线所围面积内各个电流的代数和, 和闭合曲线的位置与形状无关。

由于磁场强度与磁感应强度及磁导率间满足以下关系式:

$$B = \mu H \quad (7.1-7)$$

因此, 磁场方向与积分路径方向符合右手定则关系的电流取正号; 方向与积分路径方向不符合右手定则关系的电流取负号。

对于磁场中磁感应强度处处相等的均匀的磁场, 将式(7.1-7)代入式(7.1-6)中, 则有

$$B \oint_l dl = Bl = \mu_0 \sum I \quad (7.1-8)$$

7.1.6 电磁感应定律

电磁感应定律: 通过回路面积的磁通量 Φ 发生变化时, 在回路中产生感应电动势 e , 其大小与磁通量对时间的变化率成正比, 方向与磁通量 Φ 符合右手定则。

$$e = -K \frac{d\Phi}{dt} \quad (7.1-9)$$

Φ 的单位用韦伯 (Wb), 时间 t 的单位用秒 (s), e 的单位用伏特 (V) 时, 比例系数 $K=1$ 。

所以, 电磁感应定律通常写成

$$e = -\frac{d\Phi}{dt} \quad (7.1-10)$$

当磁通量减小时, $\frac{d\Phi}{dt} < 1$, e 为正, 方向与图示方向相同; 当磁通量增加时, $\frac{d\Phi}{dt} > 1$, e 为负, 方向与图示方向相反。

当导体回路由 N 匝线圈构成时, 导体回路的磁通量为 $N\Phi$ (称为磁通链), 通常用字母 Ψ 表示, 于是, 线圈上的电磁感应关系通常表述为

$$e = -\frac{d\Psi}{dt} = -N\frac{d\Phi}{dt} \quad (7.1-11)$$

在导体中, 电动势 ε 是电荷流动的驱动力, 若导体回路闭合, 则导体中就有电流 I 流通, I 称为感应电流。

7.1.7 洛伦兹力

1. 洛伦兹力

运动电荷在磁场中所受到的力称为洛伦兹力。

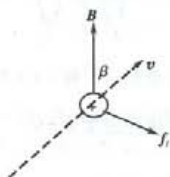


图 7.1.4 洛伦兹力

运动电荷在磁场中所受的洛伦兹力方向与运动方向和磁感应强度的方向都垂直, 如图 7.1-2 所示, 可以根据左手定则判定, 即伸开左手, 拇指与其余四指垂直, 且在同一平面; 让磁感应线穿入掌心, 并使四指指向正电荷运动的方向, 此时拇指方向就是洛伦兹力方向。运动电荷所受的洛伦兹力与电荷的运动速度 v 以及所处位置上的磁感应强度 B 的大小和方向有关。设电荷运动方向与磁场方向夹角为 β 时, 运动电荷在磁场中某点所受到的洛伦兹力的大小为

$$f_l = qvB\sin\beta \quad (7.1-12)$$

其中 q 为电荷量。

2. 洛伦兹力与感应电动势

当导体在磁场中受力做切割磁场运动时, 在导体的内部就会产生电动势。在感应电动势的作用下, 自由电子聚集在一端, 使该端带负电, 另一端由于缺少电子而带正电, 两端的正负电荷在导体中建立起电场形成电压, 当电荷产生的电场力与导体所受洛伦兹力在该段导体中取得平衡后, 导体两端形成一个稳定的电压。如果这一段导体与外接电路相连, 则它在这个电压作用下就会有电流流通, 电路最终处于稳定工作。

通常的发电机就是基于这个简单的原理设计的。

图 7.1-5 表示一段导体在均匀磁场(磁场强度 B) 中作垂直切割磁场运动时导体内部感应电动势形成及电荷移动的情况。导体 l 沿纸面向右运动 (v), 根据左手定则, 可以判断出自由电子所受的洛伦兹力的方向沿纸面向下。显然, 导体内部电动势 e 方向是沿纸面向上的, 它的大小为

$$\varepsilon = Blv \quad (7.1-13)$$

它的单位是伏特 (V), $1\text{ V} = 1\text{ T} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$ 。

3. 磁场中载流导体受力

载流导体在磁场中要受到力的作用, 如图 7.1-6 所示。一段垂直于均匀磁场的导体, 当它通以电流 I 时, 其所受合力

$$F = BIl \quad (7.1-14)$$

其中, l 为导体的长度, B 为磁感应强度。受力方向根据左手定则判定。

显然,通电导体在磁场中会因为受力而运动并对外做功。因此,只要对导体持续通电,并保持电流与磁场的方向关系不变,则力 F 驱动导体持续运动并对外做功。这就是各种电动机机械的基本设计依据。

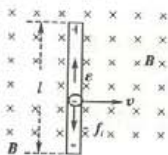


图 7.1-5 运动导体的感生电动势

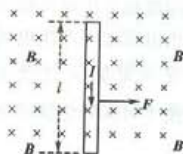


图 7.1-6 载流导体在磁场中受力

【例 7.1-4】在图 7.1-7 所示(a)电路中,开关 K 闭合后,导线环 S ()。

- (A) 向远离 N 方向摆动
(B) 向 N 方向摆动
(C) 不动
(D) 无法判断

解:答案为选项(A)。

开关 K 闭合,在螺线管内电流 I 的作用下导磁材料产生磁场,导线环 S 内的磁能量增强,导线环 S 中产生感应电流,根据左手定则可判断导线环 S 的受力方向。磁场、感应电流及受力方向如图(b)所示。所以选(A)。

另解思路:开关 K 闭合,导线环 S 必然向磁场弱的方向运动,这是因为感应电流的效果总是要反抗引起感应电流的原因。

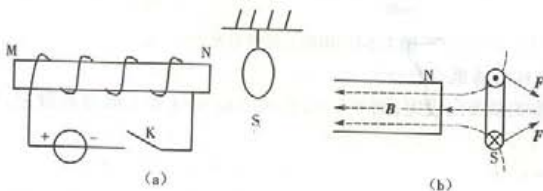


图 7.1-7 例 7.1-4 图

7.2 电路知识

7.2.1 电路组成

为了实现一定目的,将元件、器件及设备按照一定方式连接在一起就形成了电路,因此,用电目的不同,组建出的电路结构形式就不同。根据电路的连接目的和功能,电路可分为力能电路和信号电路两大类,但它们均包含电源、功能部件和连接导线三个组成部分。其中,电源为“电能的来源”,是驱动电路工作的激励能源,特指那些将非电能转换为电能的装置;功能部件是指实现电气装置功能所必需的元器件,包括电阻器、电容器、电感器、晶体管、集成电路芯片、控制开关以及其他电热的、电动的、光电的转换器件等等;连接导线确保电路电能量或信号传输。

7.2.2 电路的基本物理过程

应用目的不同,电路的结构规模也各不相同,但无论何种电路,它们工作时总是伴随着三

种基本的物理想象,即:

①电荷定向运动形成电流,电荷流动过程中在导电材料内部发生碰撞,摩擦起热,产生热效应,当热量被其他介质吸收后,出现电能量的消耗;

②电荷流动产生磁场效应,出现电能量向磁场能的转换现象;

③正负电荷之间产生电场效应,即电路中的电能量转换为电场能储存起来。

7.2.3 理想电路元件及其约束关系

为了便于对实际电路的分析,引入若干理想电路元件,每个理想元件仅与一种基本物理现象对应。

1. 电阻 R

(1) 元件约束

电阻元件表示消耗电能量,元件参数用 R 表示,其元件符号如图 7.2-1 所示。流过电阻 R 的电流 i 和两端的电压 u 的关系满足欧姆定律:

$$u = \pm Ri \quad (7.2-1)$$

当电流 i 、电压 u 的参考方向按关联方向设定时(如图 7.2-1(a)),式(7.2-1)取“+”号,反之,取“-”号,如图 7.2-1(b)。

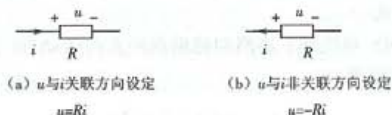


图 7.2-1 电阻元件符号及元件约束

(2) 电阻 R 消耗的功率

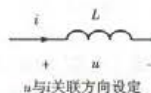
若电压电流按关联方向设定,则 $P = ui$; 若电压电流按非关联方向设定, $P = -ui$, 但均可由

$$P = i^2 R = u^2 / R \quad (7.2-2)$$

计算。

2. 电感 L

(1) 元件约束



电感是一种可以将电能转换为磁场能(储能)而不消耗能量的电路元件,描述参数用电感量 L 表示。流过电感上的电流 i 和两端的电压 u 的方向按关联方向设定时(如图 7.2-2),它们具有约束关系:

$$u = L \frac{di}{dt} \quad (7.2-3)$$

图 7.2-2 电感元件符号

若电压电流按非关联方向,则有约束关系:

$$u = -L \frac{di}{dt}$$

(2) 电感 L 储存的能量

当电流 i 通过电感元件时,可存储 W_L 磁场能,其计算式为

$$W_L = \frac{1}{2} Li^2 \quad (7.2-4)$$

v_L 与电感 L 和流过的电流 i 有关。

电感在直流电路中, $u = L \frac{di}{dt} = 0$, 相当于短路。

3. 电容

(1) 元件约束

电容是一种可以将电能转换为电场能(储能)而不消耗能量的电路元件,其参数用 C 表示。元件符号如图 7.2-3 所示,其元件约束关系为

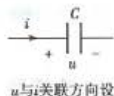


图 7.2-3 电容元件符号

$$i = \begin{cases} C \frac{du}{dt} & u \text{ 与 } i \text{ 关联方向设定} \\ -C \frac{du}{dt} & u \text{ 与 } i \text{ 非关联方向设定} \end{cases} \quad (7.2-5)$$

(2) 电容 C 储存的能量

当电容元件两端存在电压 u 时,可存储 W_c 电场能,其计算式为

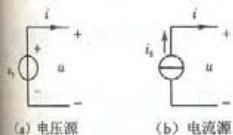
$$W_c = \frac{1}{2} Cu^2 \quad (7.2-6)$$

v_C 与电容参数 C 和其两端电压 u 有关。

电容在直流电路中, $i = C \frac{du}{dt} = 0$, 相当于开路。

4. 电源

电源可分为独立源和受控源。



(a) 电压源 (b) 电流源

图 7.2-4 独立源元件符号

独立源是能够单独对电路产生激励作用的电源,产生电压激励的电源为电压源,其符号如图 7.2-4(a),其两端电压 u 与通过的电流 i 无关,元件约束为 $u = u_s$;产生电流激励的电源为电流源,其符号如图 7.2-4(b),其通过的电流 i 与两端电压 u 无关,元件约束为 $i = i_s$ 。

必须在电路其他部分的电压或电流的控制下才能对电路产生激励作用的电源称为受控源,共有 4 种形式,如图 7.2-5。

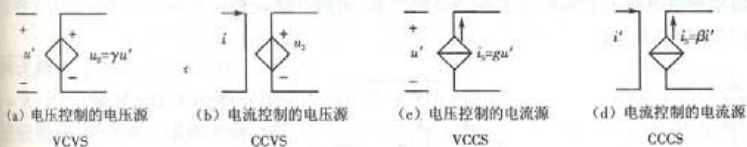


图 7.2-5 独立源元件符号

【例 7.2-1】 通过线性电阻元件 R 的电流及其端电压的参考方向如图 7.1-6 所示,图中同时给出了电压与电流之间的描述,其中表达式正确的是

- (A) 图 1 (B) 图 2 (C) 图 3 (D) 图 4

解:选(B)。

这是一个元件约束问题,元件约束表达式与物理量参考方向有关。

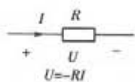


图1

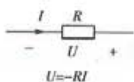


图2

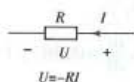


图3

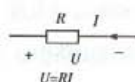


图4

【例 7.2-1】题图

7.2.4 电路模型

由电路元件模型组成的电路称为电路模型。

1. 实际电路部件的电路模型

对于实际电源可以由理想独立源与电阻组合表示,如图 7.2-7。

功能部件中:

- ①单纯耗能的设备基本物理现象只有消耗电能,可通过电阻 R 元件描述;
- ②电感线圈工作于在低频交流电情况下,既有较强的磁场效应,又有热效应产生,可由电感元件 L 与电阻元件 R 串联表示,如图 7.2-8 所示;
- ③电容器工作时主要体现电场效应,可由电容元件 C 描述。

连接导线则可用 $R=0$ 的导线表示。

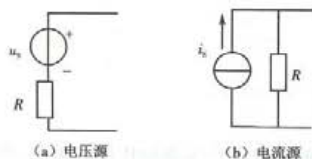


图 7.2-7 实际电源的电路模型

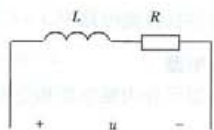


图 7.2-8 电感线圈的电路模型

2. 元件的串并联连接

几个元件按首尾相连原则一个接一个顺序连接称为元件的串联,这些元件流过同一个电流,各个元件电压之和等于总电压。几个元件均连接在两个结点之间称为元件的并联,这些元件承受同一个电压,流过各元件电流之和等于并联电路总电流。

(1) 电阻元件的串并联

电阻串联电路的总电阻等于各个电阻之和,电阻并联电路总电阻的倒数(电导)等于各个电阻倒数(电导)之和。

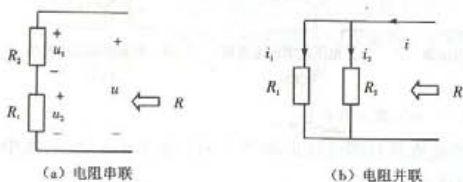


图 7.2-9 电阻的串并联

图 7.2-9(a) 所示电路为两个电阻元件的串联,等效电阻: $R = R_1 + R_2$, 每个电阻上的电压根据分压公式可得

$$u_1 = \frac{R_1}{R_1 + R_2} u, u_2 = \frac{R_2}{R_1 + R_2} u$$

图 7.2-9(b) 所示电路为两个电

阻元件的并联,等效电阻: $\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$

$\frac{1}{R_2}, R = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$, 根据分流公式可得每个电阻中通过的电流, 即: $i_1 = \frac{R_2}{R_1 + R_2} i, i_2 = \frac{R_1}{R_1 + R_2} i$ 。

(2) 电感元件的串并联

电感串联电路的等效电感等于各个电感之和, 电感并联电路等效电感的倒数等于各个电感倒数之和, 即

n 个电感串联的等效电感: $L = L_1 + L_2 + \dots + L_n$

n 个电感并联的等效电感: $\frac{1}{L} = \frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2} + \dots + \frac{1}{L_n}$

(3) 电容元件的串并联

电容串联电路的等效电容的倒数等于各个电容倒数(电导)之和, 电容并联电路等效电容等于各个电容之和, 即

n 个电容串联的等效电容: $\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \dots + \frac{1}{C_n}$

n 个电容并联的等效电容: $C = C_1 + C_2 + \dots + C_n$

7.2.5 基尔霍夫定律

基尔霍夫定律包括基尔霍夫电流定律和基尔霍夫电压定律, 它们是分析、计算电路的基本定律。

1. 基尔霍夫电流定律(KCL)

对任一结点, 流入结点的各支路电流的总和等于流出结点的各支路电流的总和。对于图 7.2-10 所示节点 a 的 KCL, 有: $i_1 + i_2 = i_3 + i_4$ 。

若设定流入结点的电流取正号, 流出结点的电流取负号, 则图 7.2-10 所示节点 a 的 KCL, 又可描述为

$$(i_3 + i_4) - (i_1 + i_2) = 0$$

所以, 基尔霍夫电流定律可描述为

$$\sum i_{\text{流入}} = \sum i_{\text{流出}} \quad \text{或} \quad \sum i = 0 \quad (7.2-7)$$

KCL 不仅适用于电路中的任一结点, 它也适用于包围某一部分电路的封闭平面, 这个封闭平面可视为广义结点, 在图 7.2-11 电路中, 虚线圈起来的部分电路可视为广义结点, 则

$$i_A + i_B + i_C = 0$$

2. 基尔霍夫电压定律(KVL)

对于任一回路(闭合或开口), 循行一周, 电压降落的总和等于电压上升的总和, 即

$$\sum U_{\text{电压升}} = \sum U_{\text{电压降}} \quad (7.2-8)$$

当规定回路中电压参考方向与循行方向一致者取正号、相反者取负号时, 基尔霍夫电压定律可描述为: 任一回路(闭合或开口), 循行一周, 各部分电压的代数和等于零, 即

$$\sum U = 0 \quad (7.2-9)$$

图 7.2-11 所示电路中, ADBCA 回路的 KVL 方程:

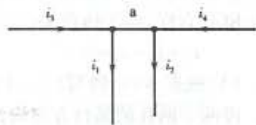


图 7.2-10 电路中的结点

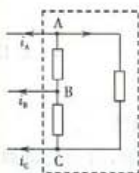


图 7.2-11 广义结点

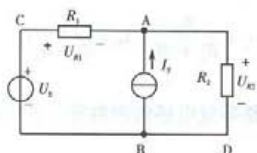


图 7.2-12 电路中的回路

1. 一般方法

对于含有 n 个节点、 l 条支路和 N 个网孔的电路,若 l 条支路的电流均未知,则需列写 l 个独立方程,其具体步骤:

- ① 设定各支路电流的参考方向和各网孔的循环方向;
- ② 应用 KCL 列写独立的 $n-1$ 个结点电流方程;
- ③ 应用 KVL 列写独立的 N 个回路(网孔)电压方程。

由此,共列写 $l = (n-1) + N$ 个独立方程。以图 7.2-12 为例,具体说明支路电流法。

(1) 图 7.2-13 所示电路共有 3 条支路,所以需要求解 3 个支路电流。首先设定 3 条支路电流参考方向,如图 i_1 、 i_2 和 i_3 。

(2) 电路共有 2 个结点(结点 a 和结点 b),需列写 1 个 KCL 方程,对于结点 a:

$$i_1 + i_2 - i_3 = 0 \quad (7.2-10)$$

(3) 根据 KVL 列写 $(3-1)$ 各独立的回路电压方程。设两个网孔的循环方向均为顺时针,如图所示。

$$\left. \begin{aligned} \text{对于网孔 I: } -u_1 + i_1 R_1 - i_2 R_2 + u_2 = 0 \\ \text{对于网孔 II: } -u_2 + i_2 R_2 + i_3 R_3 + u_3 = 0 \end{aligned} \right\}$$

$$(7.2-11)$$

整理方程组(7.2-11),并与方程组(7.2-10)联立,获取求解图 7.2-12 所示电路关于 3 个未知支路电流的方程组,即

$$\begin{cases} i_1 + i_2 - i_3 = 0 \\ i_1 R_1 - i_2 R_2 = u_1 - u_2 \\ i_2 R_2 + i_3 R_3 = u_2 + u_3 \end{cases} \quad (7.2-12)$$

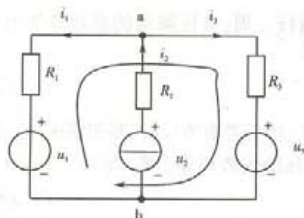


图 7.2-14 支路电流法

$$U_{R2} + U_{R1} = U_S \quad \text{或} \quad U_{R2} - U_S + U_{R1} = 0$$

7.2.6 支路电流法

支路电流法是以支路电流为变量,直接应用基尔霍夫定律列写方程求解的方法。对于任何一个电路,只要确定了其各个支路的电流,该电路中各元件的电压及功率就完全确定了。因此,支路电流法是分析电路问题的基础方法。

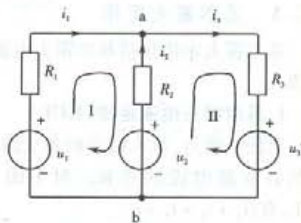


图 7.2-13 支路电流法

2. 含理想电流源电路的支路电流法

如图 7.2-14 所示电路含有电流源,由于电流源的电流已知,所以电流源所在支路的电流也就已知,这样所需求解的支路电流个数减少为 $l' = 2$ 个。但是电流源的端电压未知,若采用一般方法求解,势必造成求解问题的复杂度,因此,在这种情况下所采取的求解策略是:

① 设定各支路电流的参考方向和各网孔的循环方向;

②应用 KCL 列写独立的 $n-1$ 个结点电流方程;

③应用 KVL 列写独立的 $l-(n-1)$ 个回路电压方程。

值得注意的是:选择不包含电流源的回路作为列写对象。如图 7.2-13 所示电路所需列写的独立方程组为

$$\begin{cases} i_1 + i_2 - i_3 = 0 \\ R_1 i_1 + R_3 i_3 = u_1 - u_3 \end{cases}$$

【例 7.2-2】 设图 7.1-15 所示电路中的元件参数已知,若采用支路电流法求解各支路电流,则需列写的最少独立方程个数为 ()。

(A)4

(B)3

(C)2

(D)1

解:答案选(C)。

根据已知电路有: $n=2$ 个节点、 $N=2$ 个网孔和 $l=3$ 条支路, $k=1$ 个电流源,所以,本题所需最少的独立方程数为 2 个,分别为:(2-1)个 KCL 方程、(2-1)个 KVL 方程。

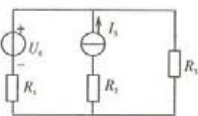


图 7.1-15 例 7.2-2 图

7.2.7 电压源与电流源模型的等效互换

一个实际的独立电源可以用两种模型来表述,即电压源模型和电流源模型。当用这两种模型表述同一个电源时,它们之间是可以等效互换的,这两个互换的电源模型具有完全相同的外部特性。图 7.2-16 中电压源模型(a)图和电流源模型(b)图分别为实际电源(c)图的等效模型。

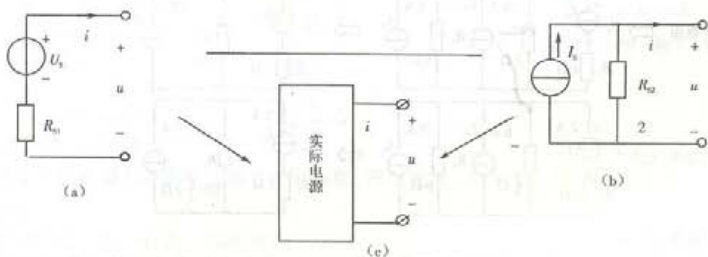


图 7.2-16 实际电源的两种等效电源模型

根据基尔霍夫电压定律可列出电压源端口的伏安特性:

$$u = U_s - R_{S1} i \quad (7.2-13)$$

根据基尔霍夫电流定律可得电流源端口的伏安特性:

$$i_s = i + \frac{u}{R_{S2}}$$

经整理可得:

$$u = R_{S2} i_s - R_{S2} i \quad (7.2-14)$$

由式(7.2-13)和式(7.2-14)推出电压源模型和电流源模型等效互换的条件为

$$R_{S1} = R_{S2} = R_S$$

$$u_S = i_S R_S, i_S = \frac{u_S}{R_S}$$

(7.2-15)

值得注意的是:电压源电压的方向和电流源电流的流出方向的对应关系。

【例 7.2-3】 利用电压源与电流源等效互换的方法求解图 7.1-17 所示电路中的电压 U_5 的正确过程是()。

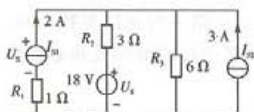
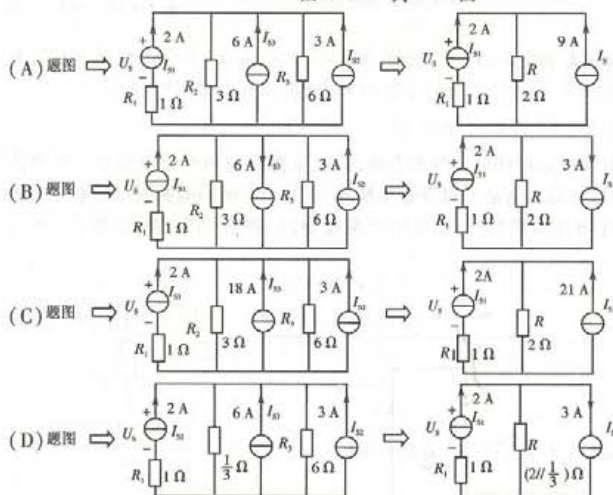


图 7.1-17 例 7.2-3 图



解:答案选(A)。

选项(B)的问题:在将电压源模型等效转换为电流源模型时,电流源的电流方向反了。

选项(C)和选项(D)问题:在将电压源模型等效转换为电流源模型时,电流源电流、等效电阻值不满足等效条件。

7.2.8 等效电源定理

电路分析中的等效方法是将复杂结构的电路问题用一个简单的结构去等效地替换它,从而形成一个新的结构相对简单电路的方法。

等效电源定理就是保证等效替换的一种有效方法。等效电源定理包括等效电压源定理和等效电流源定理。重点讨论一下等效电压源定理,即戴维南定理。

戴维南定理的具体描述:一个有源线性两端网络可以等效为一个理想电压源 U_S 和一个电阻 R_S 串联的电路。理想电压源 U_S 的电压等于有源线性两端网络开路时的端口电压,串联电阻 R_S 的值等于有源线性两端网络除源后的无源网络的端口等效电阻,如图 7.2-18。

如何将含有源线性两端网络变为无源网络? 这涉及到除源原则, 也就是除去有源线性两端网络中电源的作用。对于理想电压源供出电压为零, 可将其视为“短路”; 对于理想电流源供出电流为零, 可将其视为“开路”, 如图 7.2-19。

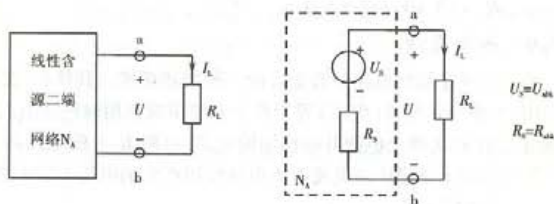


图 7.2-18 戴维南定理



(a) 理想电压源视为“短路” (b) 理想电流源视为“断路”

图 7.2-19 戴维南定理

【例 7.2-3】 图 7.1-20 所示电路的戴维南等效模型为

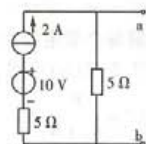
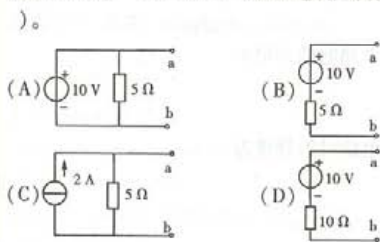


图 7.1-20 例 7.2-3 图

解: 答案选(B)。

戴维南等效模型为理想电压源与电阻串联, 所以选项(A)和(C)错。选项D错了在无源网络的获取。

【例 7.2-4】 某一有源二端线性网络如图 7.1-21(a) 所示。该网络的戴维南等效电路如图 7.1-21(b) 所示, 其中 U_s 和 R_s 取值为()。

- (A) 6 V, 6 Ω (B) 6 V, 2 Ω
(C) 12 V, 6 Ω (D) 12 V, 2 Ω

解: 答案选(D)。

戴维南等效模型中 U_s 为二端网络的开路电压, 本题根据分压公式可得

$$U_s = \frac{3+3}{3+3+3} \times 18 = 12 \text{ V}$$

R_s 为除源后无源网络的等效电阻, 电压源视为短路, 所以

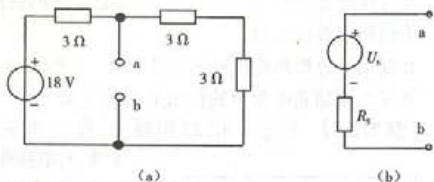


图 7.1-21 例 7.2-4 图

$$R_s = (3 + 3) // 3 = 2 \Omega$$

7.2.9 叠加原理

叠加原理是线性电路的叠加性的一种描述形式。其核心:线性电路中,如果有多个电源共同作用,电路中各电流(电压)等于各个电源单独作用时产生电流(电压)的代数和。如图 7.2-22 所示,图(a)为两个电源共同作用的电路,电阻 R_3 上的电压 U 等于图(b)电压源 U_s 单独作用产生的电压 U' 和图(c)电流源 I_s 单独作用产生的电压 U'' 的代数和,即

$$U = U' + U'' \quad (7.2-16)$$

除源原则与等效电源定理中的除源原则相同。

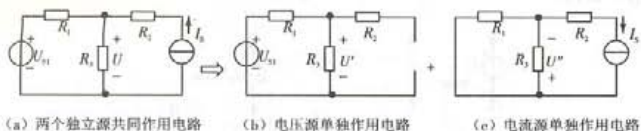


图 7.2-22 叠加原理求解电路

采用叠加原理求解电路是一个将具有 n 个独立电源的电路分析问题转化为 n 个单电源的电路问题来求解。结合图 7.2-22 说明应用叠加原理求解问题的具体步骤。

1. 求解每个单电源电路作用下的响应分量

由图 7.2-16(b) 可得,当电压源单独作用于电路时的分量为

$$U' = \frac{R_3}{R_1 + R_3} U_s$$

由图 7.2-16(c) 可得,当电流源单独作用于电路时的分量为

$$U'' = \frac{R_1 R_3}{R_1 + R_3} I_s$$

2. 叠加分量获取总量

分量叠加总量时,需要注意的是:当分量的参考方向与总量的参考方向相同取正号,分量的参考方向与总量的参考方向相反时取负号。因此,图 7.2-16(a) 中所求电压 U 的计算式为

$$U = U' - U''$$

在应用叠加原理分析问题时,应注意定理的适用条件:

- ① 仅用于线性电路;
- ② 仅用于分析线性电路的电压电流,不能用于功率的求取;
- ③ 仅考虑独立电源单独作用下的响应量,受控电源的作用不遵循叠加原理。

【例 7.2-5】 图示 7.12-23 电路中,若 U_s 单独作用时, $I' = 1 \text{ A}$, 电阻 R 消耗的功率 $P' = 5 \text{ W}$, I_s 单独作用时, $I'' = -1 \text{ A}$, 电阻 R 消耗的功率 $P'' = 5 \text{ W}$, 那么 U_s, I_s 共同作用时, 电阻 R 消耗的功率为 ()。

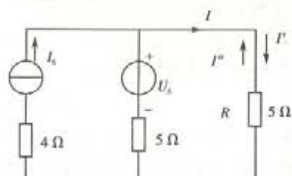


图 7.2-23 例 7.2-5 图

- (A) $P' + P'' = 10 \text{ W}$
- (B) $(I' - I'')^2 R = 20 \text{ W}$
- (C) $(I' + I'')^2 R = 0 \text{ W}$

(D) 因 U_s, I_s 未知, 无法计算

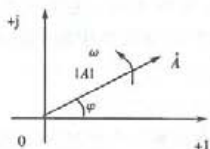


图 7.2-25 旋转的矢量表示相量

①代数形式 $A = |A| \cos(\omega t + \varphi) + j|A| \sin(\omega t + \varphi)$;②极坐标形式 $A = |A| \angle (\omega t + \varphi)$;③指数形式 $A = |A| e^{j(\omega t + \varphi)}$ 。 $|A|$ 为相量的模, ω 为旋转角速度, φ 为相量的起始角度。

2. 正弦交流电的相量形式

如图 7.2-26 反映了正弦交流电与相量间的映射关系,即正弦量的有效值或幅值、角频率和初相角分别与相量的模值、起始角、旋转角速度一一对应,这样实现了正弦量从时间域到相量域的映射。

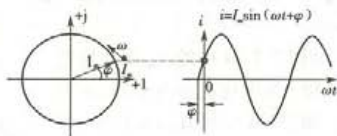


图 7.2-26 正弦量与相量的映射

正弦量的时域形式

正弦量的相量形式

$$i = \sqrt{2} I \sin(\omega t + \varphi) \Leftrightarrow \dot{I} = I \angle (\omega t + \varphi)$$

由于组成线性电路的无源元件电阻元件 R 、电感元件 L 和电容元件 C 的元件约束分别为

$$\begin{array}{ccc} \begin{array}{c} i \\ + \quad - \\ R \\ u \\ u = Ri \end{array} & \begin{array}{c} i \\ + \quad - \\ L \\ u \\ u = L \frac{di}{dt} \\ u = L \frac{di}{dt} \end{array} & \begin{array}{c} i \\ + \quad - \\ C \\ u \\ i = C \frac{du}{dt} \\ i = C \frac{du}{dt} \end{array} \end{array}$$

所以,交流电路中的激励和响应是同频率的交流电,在交流电路稳态分析中只涉及同频率正弦交流电的分析与计算问题。因此,正弦量的相量只保留最大值和初相位两个要素,于是相量简记为: $\dot{I} = I \angle \varphi$ 、 $\dot{I} = I(\cos \varphi + j \sin \varphi)$ 和 $\dot{I} = I e^{j\varphi}$ 。另外,在不特意说明的情况下,正弦量的相量是指有效值相量,即用正弦量的有效值与相量的模相对应,如果将正弦量的幅值与相量的模相对应,则称最大值相量,并加下标“m”进行标记。

值得注意的是:正弦交流电与相量之间仅仅是映射关系,不是相等关系。

$$i = \sqrt{2} I \sin(\omega t + \varphi) \times \dot{I} = I \angle \varphi$$

(7.2-21)

$$i = \sqrt{2} I \sin(\omega t + \varphi) \Leftrightarrow \dot{I} = I \angle \varphi$$

3. 相量图

复平面上画出同频率的电压、电流相量可直观地表示这些电压、电流的大小和相位关系,这种几何表达方式称为相量图。如图 7.2-27 所示相量图,反映了 i 与 u 的相位关系是:电流 i 超前于电压 u 。

【例 7.2-7】 已知某二端网络 N 的端口电压 $u(t) = 100 \sin(\omega t + 60^\circ) \text{ V}$, 则不正确的描述形式为()。

(A) $\dot{U} = 50\sqrt{2} \angle 60^\circ \text{ V}$

(B) $\dot{U}_m = 100 \angle 60^\circ \text{ V}$

(C) $\dot{U} = 100 \angle 60^\circ \text{ V}$

(D) $\dot{U} = 50\sqrt{2} (\cos 60^\circ + j \sin 60^\circ) \text{ V}$

解:本题答案为选项(C)。

根据已知正弦量的时域描述可知: $U_m = 100 \text{ V}$, $U =$

$50\sqrt{2} \text{ V}$, $\varphi_u = 60^\circ$, 所以,

$$\dot{U} = 50\sqrt{2} \angle 60^\circ = 50\sqrt{2} \cos 60^\circ + 50\sqrt{2} \sin 60^\circ \text{ V}$$

$$\dot{U}_m = 100 \angle 60^\circ \text{ V}$$

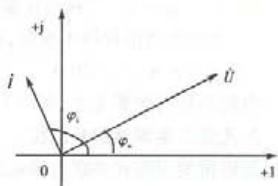


图 7.2-27 u 与 i 相量

对任何一个无源二端网络端口上的电压电流的相量之比称为该无源二端网络的复阻抗 Z , 如图 7.2-28 所示无源二端网络的复阻抗为

$$Z = \frac{\dot{U}}{\dot{I}} = \frac{U \angle \varphi_u}{I \angle \varphi_i} = \frac{U}{I} \angle (\varphi_u - \varphi_i) = z \angle \varphi \quad (7.2-22)$$

其中: $z = \frac{U}{I} = |Z|$ 为阻抗, 等于端口电压与端口电流有效值之比, 也是复阻抗的模。 $\varphi = \varphi_u - \varphi_i$, 为阻抗角。

2. RLC 无源元件的复阻抗

流过无源元件 R 、 L 、 C 的电流 i 和两端的电压 u 参考方向按关联方向设定, 而且电流 i 、电压 u 可以用相量形式描述时, 根据元件的时域约束形式, 推得约束的相量形式分别为

电阻元件: $\dot{U} = R\dot{I}$ (7.2-23)

电感元件: $\dot{U} = j\omega L\dot{I}$ (7.2-24)

电容元件: $\dot{U} = \frac{1}{j\omega C}\dot{I}$ (7.2-25)

它们的相量域模型为

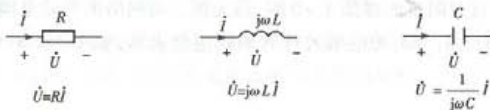


图 7.2-22 无源元件的相量域模型及元件约束的相量形式

根据复阻抗的定义, 可得

①电阻元件的复阻抗: $Z = R$;

②电感元件的复阻抗: $Z = j\omega L = jX_L$, X_L 为电感抗, 与频率成正比;

③电容元件的复阻抗: $Z = \frac{1}{j\omega C} = -jX_C$, X_C 为电容抗, 与频率成反比。

【例 7.2-7】 RLC 并联电路如图 7.2-29 所示, 在正弦电压 u 的激励下, 各支路电流有效值 $I_1 = I_2 = I_3 = 10 \text{ A}$, 当电压频率增加一倍而保持其有效值不变时, 各电流有效值应变为()。

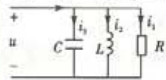


图 7.2-29 例 7.2-7 图

(A) $I_1 = 20 \text{ A}$ $I_2 = 20 \text{ A}$ $I_3 = 20 \text{ A}$

(B) $I_1 = 10 \text{ A}$ $I_2 = 20 \text{ A}$ $I_3 = 5 \text{ A}$

(C) $I_1 = 10 \text{ A}$ $I_2 = 5 \text{ A}$ $I_3 = 20 \text{ A}$

(D) $I_1 = 5 \text{ A}$ $I_2 = 5 \text{ A}$ $I_3 = 5 \text{ A}$

解:答案选(C)。当端电压频率增加一倍时,电容抗 X_C 减小一半,电感抗 X_L 增大一倍,所以,当端电压有效值保持不变时,电容电感支路的电流相应地增大一倍和减小一半,变为

$$I_2 = 5 \text{ A} \quad I_3 = 20 \text{ A}$$

由于电阻参数与频率无关,所以 $I_1 = 10 \text{ A}$ 。

3. 无源二端网络的复阻抗

复阻抗的串联和并联的等效阻抗的计算方法和直流电路中电阻的串联和并联的计算方法相同,即

n 个复阻抗串联

$$Z = Z_1 + Z_2 + \cdots + Z_n \quad (7.2-26)$$

n 个复阻抗并联

$$\frac{1}{Z} = \frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2} + \cdots + \frac{1}{Z_n} \quad (7.2-27)$$

注意:式(7.2-26)和式(7.2-27)应是各元件的复阻抗,而不是阻抗。

【例 7.2-8】 求图 7.2-30 所示无源二端网络的复阻抗 Z 。

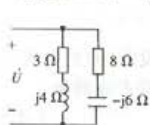


图 7.2-30 例 7.2-8 图

解:设电阻与电感的串联为复阻抗 Z_1 ,电阻与电容的串联为复阻抗 Z_2 。根据已知参数可得

$$Z_1 = 3 + j4 = 5 \angle 53.1^\circ \Omega, Z_2 = 8 - j6 = 10 \angle -36.9^\circ \Omega$$

$$Z = \frac{Z_1 \cdot Z_2}{Z_1 + Z_2} = 4.47 \angle 26.5^\circ \Omega = (4 + j2) \Omega$$

4. 复阻抗 Z 反映无源二端网络的性质

由例 7.2-8 不难看出,由电阻、电感、电容组成的任意一个无源二端网络总能等效为一个复阻抗 $Z = |Z| \angle \varphi = R + jX$,它反映了电路的性质。

当阻抗角 $\varphi > 0$ 或复阻抗的虚部 $X > 0$ 时,该无源二端网络的等效电路可通过一个阻值为 R 的电阻和一个电感抗 $X_L = X$ 的电感元件的串联组合表示,如图 7.2-31(a),此时电路呈感性。

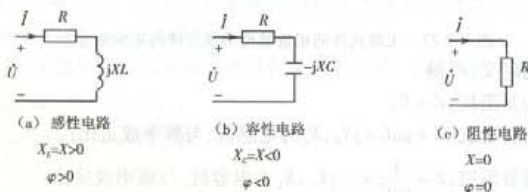


图 7.2-31 复阻抗 $Z = R + jX$

当阻抗角 $\varphi < 0$ 或复阻抗的虚部 $X < 0$ 时,该无源二端网络的等效电路由一个阻值为 R 的电阻和一个电容抗 $X_C = X$ 的电容元件串联表示,如图 7.2-31(b),电路呈容性。

当阻抗角 $\varphi = 0$ 或复阻抗的虚部 $X = 0$ 时,该无源二端网络的等效电路仅由一个阻值为 R 的电阻表示,如图 7.2-31(c),电路呈阻性。

由 $Z = |Z| \angle \varphi = R + jX$ 可知:

$$Z = \sqrt{R^2 + X^2} \quad (7.2-28)$$

$$\varphi = \arctan \frac{X}{R} = \arccos \frac{R}{|Z|} = \arcsin \frac{X}{|Z|} \quad (7.2-29)$$

$|Z|$ 、 R 及 X 构成直角三角形,称为阻抗三角形,如图 7.2-32。

【例 7.2-9】 RLC 串联电路如图 7.2-33 所示,在正弦电压 $u(t) = U_m \sin(\omega t + \varphi)$ 的激励下,其等效复阻抗等于()。

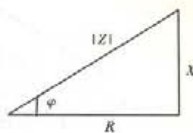


图 7.2-32 阻抗三角形

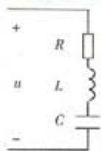


图 7.2-33(a) 例 7.2-9 图

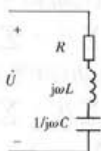


图 7.2-33 图的相量域模型

(A) $R + jX_L - jX_C$

(B) $R + jX_L + jX_C$

(C) $R - jX_L + jX_C$

(D) $R + X_L + X_C$

解:根据例图的相量域模型可知电路的等效复阻抗:

$$Z = R + j\omega L + 1/j\omega C$$

其中: $\omega L = X_L$, $1/\omega C = X_C$

所以 $Z = R + jX_L + X_C/j = R + jX_L - jX_C$ 。答案为选项(A)。

在计算元件串并联等效复阻抗时,代入公式的参数应是复阻抗,而不是阻抗,所以选项 D 错。

7.2.13 交流电路功率及功率因数

1. 交流电路功率

从电路的功能关系看,正弦交流电路包括以下三个功率的计算。

①视在功率 S 是电源供出的总电压和总电流的有效值的乘积,

$$S = UI \quad (7.2-30)$$

它表示负载工作时所占用的电源容量,单位为“VA”。

②有功功率 P 是负载消耗的电能量,它的计算式为

$$P = UI \cos \varphi \quad (7.2-31)$$

这部分能量转变为电路对外部所做的有用功,单位为“W”。

③无功功率 Q 用于负载与电源之间的能量交换,

$$Q = UI \sin \varphi \quad (7.2-32)$$

该功率并不转换为有用功,但要占用电源的容量,单位为“Var”。

三个功率构成直角三角形,称为功率三角形,如图 7.2-34,三者满足关系式

$$S = UI = \sqrt{P^2 + Q^2}$$

④功率与 RLC 各元件功率的关系。

对于电阻元件,只消耗电能量,不存在与电源间的能量交互,所以

$$P_R = U_R I_R = R I_R^2 = U_R^2 / R, Q_R = 0 \quad (7.2-33)$$

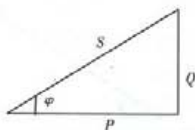


图 7.2-34 功率三角形

电路的总有功功率(平均功率)等于 RLC 各元件功率有功功率之和,即

$$P = \sum P_R + \sum P_L + \sum P_C = \sum P_R \quad (7.2-36)$$

电路的总无功功率等于

$$Q = \sum Q_L - \sum Q_C \quad (7.2-37)$$

2. 功率因数

式(7.2-31)中的“ $\cos \varphi$ ”称为交流电路的功率因数。它表示交流电路中实际消耗的有用功在整个电源容量中所占的比例,代表了交流电路中电能有效利用的程度。功率因数 $\cos \varphi$ 的计算式如下:

$$\cos \varphi = \frac{P}{UI} \quad (7.2-36)$$

式中的 φ 为阻抗角,功率因数 $\cos \varphi$ 还可根据式(7.2-29)计算,即

$$\cos \varphi = \cos(\varphi_u - \varphi_i) = \cos\left(\arctan \frac{X}{R}\right) = \cos\left(\arcsin \frac{X}{|Z|}\right) = \cos\left(\arccos \frac{R}{|Z|}\right) \quad (7.2-36)$$

由此不难看出,功率因数 $\cos \varphi$ 是由电路参数所决定的固有性质。

3. 提高功率因数及过补偿问题

对于力能电路而言,不允许低效率的电路(低功率因数的交流电路)存在,因此当电路的功率因数较低时,需要通过调整电路的参数来提高它的功率因数。由于力能电路中的电感性质的负荷比重很大,因此,提高功率因数的有效办法之一是在感性负载两端并联一个适当的电容,如图 7.2-35 所示。

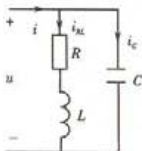


图 7.2-35 提高功率因数措施



图 7.2-36 图 7.2-35 的相量图

图 7.2-35 的相量图如图 7.2-36。设电路外加电压初相位为 0,由于感性负载的端电压 u 超前流过的电流 i_{RL} ,所以电流相量位于第四象限;又因为“电容电流超前电容电压 90° ”和 $\dot{I} = \dot{I}_{RL} + \dot{I}_C$,得到电流 i 相量。由此图容易看出,感性负载并联电容后,电路电压与电流间的相位差从 φ 变到了 φ' ,因为 $\varphi' < \varphi$,所以 $\cos \varphi' > \cos \varphi$,功率因数得到了提高。功率因数一旦得到提高,电源的利用率以及电路的传输率也随之得到提高。

当外加电源电压一定时,电容值越大,电容电流则越大, $(I_C = \frac{U_C}{X_C} = U_C \cdot \omega C)$, 这会使 φ' 随电容的增大逐渐变小, φ' 过 0 后, 如果继续增大电容, 会因电流 I_C 继续增大, 使 φ' 从 0 逐渐变负 (绝对值变大), 此后电容值越大, 功率因数反而下降, 称为过补偿。应避免过补偿。

【例 7.2.9】如图 7.2.37(a) 电路中, 电容 C 可调, 若感性负载的功率因数为 $\cos \varphi$, 并接电容后, 电路的功率因数为 $\cos \varphi'$, 电路的端口电流 i 的有效值 I 和电容 C 的关系如图 7.2.37(b) 所示, 则下列说法不正确的是()。

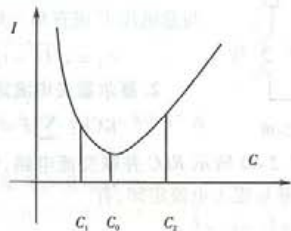
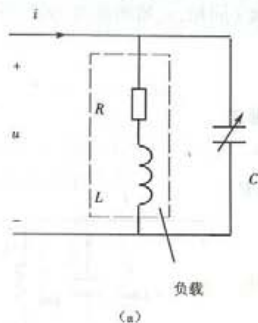


图 7.2.37 例 7.2.9 图

- (A) 当 $C = C_0$ 时, 电路的功率因数最大
 (B) 当 $C < C_0$ 时, $\cos \varphi' > \cos \varphi$
 (C) 当电路出现过补偿时, $C > C_0$
 (D) 当 $C > C_0$ 时, $\cos \varphi' > \cos \varphi$

解: 答案为(D)。

当外加电源电压一定时, 电容值越大, 电容电流则越大, 当 $C = C_0$ 时, 电流最小, $\varphi' = 0$, $\cos \varphi' = 1$, 电路效率最高, 如果继续增大电容, 使 $C > C_0$, 会因电流 I_C 继续增大, 使 φ' 的绝对值变大, 此后电容值越大, 功率因数反而下降, 出现过补偿现象, 应避免过补偿。因此选项(A)、选项(B)及选项(C)的说法都是正确的。

7.2.14 正弦交流电路相量分析

1. 基尔霍夫电压定律的相量形式

$$\text{KVL: } \sum \dot{U} = 0$$

(7.2-37)

对于图 7.2.38 所示的 RLC 串联电路, 由基尔霍夫电压定律的相量形式, 可得

$$\dot{U} = \dot{U}_R + \dot{U}_L + \dot{U}_C$$

将元件约束的相量形式代入, 有

$$\begin{aligned} \dot{U} &= RI \angle \varphi_i + j\omega LI \angle \varphi_i + \frac{1}{j\omega C} I \angle \varphi_i \\ &= U_R \angle \varphi_i + jU_L \angle \varphi_i - jU_C \angle \varphi_i \end{aligned}$$

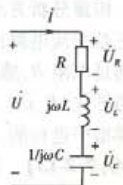


图 7.2.38 RLC 串联电路

$$\begin{aligned}
 &= (U_R + jU_L - jU_C) \angle \varphi_i \\
 &= \sqrt{U_R^2 + (U_L - U_C)^2} \angle (\varphi_i + \tan^{-1} \frac{X_L - X_C}{R})
 \end{aligned}$$

即总电压有效值 $U = \sqrt{U_R^2 + (U_L - U_C)^2}$ (7.2-38)

而 $U \neq U_R + U_L + U_C$

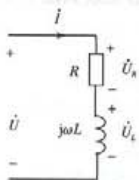


图 7.2-39

【例 7.2-11】如图 7.2-39 所示电路,已知: $U_R = 60 \text{ V}$, $U = 100 \text{ V}$, 求

U_L 。

解:由已知电路图知: u_R 与电流 i 同相, u_L 超前电流 i 90° , 所以, U_R 、 U_L 与总电压 U 成直角三角形, 有

$$U_L = \sqrt{U^2 - U_R^2} = 80 \text{ V}$$

2. 基尔霍夫电流定律的相量形式

$$\text{KCL: } \sum \dot{I} = 0$$

(7.2-39)

如图 7.2-40 所示 RLC 并联交流电路, 设电流 $\dot{U} = U \angle \varphi_u$, 根据基尔霍夫电流定律, 有

$$\dot{I} = \dot{I}_R + \dot{I}_L + \dot{I}_C$$

代入 RLC 元件约束的相量形式, 可得 RLC 并联电路总电流有效值和各支路电流有效值之间的特殊关系:

$$I = \sqrt{I_R^2 + (I_L - I_C)^2} \quad (7.2-40)$$

【例 7.2-12】如图 7.2-41 所示正弦交流电路, 已知: $X_L = 5 \Omega$, $R = 10 \Omega$, $X_C = 4 \Omega$, $U_R = 60 \text{ V}$, $U = 100 \text{ V}$, 求端口电压表的读数。

解:对于图示电路中, LC 并联环节端电压的有效值为

$$5 \times 4 = 20 \text{ V}$$

因此, 电容中的电流有效值为: $20/X_C = 5 \text{ A}$ 。

因为电容中的电流与电感中的电流相位差为 180° , 所以, 根据基尔霍夫电流定律算得电阻中的电流有效值为

$$I = |(I_L - I_C)| = 1 \text{ A}$$

电阻电压有效值为 $1 \times 10 = 10 \text{ V}$

根据基尔霍夫电压定律, 有

$$U = \sqrt{10^2 + 20^2} = \sqrt{1 + 4} = 22.4 \text{ V}$$

端口电压表的读数为 22.4 V 。

3. 相量分析方法

正弦交流电路由正弦交流电源激励其工作, 电路中的基本元件电阻、电感和电容形成的阻抗分别是电阻 R 、感抗 X_L 和容抗 X_C , 当使用相量来描述电路中的电压及电流后, 它们便以复数阻抗的形式 (R 、 jX_L 、 $-jX_C$) 出现在电路模型中, 正弦交流电路稳态分析的相量法就是在这样的电路模型中进行的。下面通过例 7.2-13 说明正弦交流电路相量分析方法。

【例 7.2-13】如图 7.2-41 所示正弦交流电路的相量域模型, 求电感元件中的电流 \dot{I}_L 。

解:

(1) 采用支路电流法。

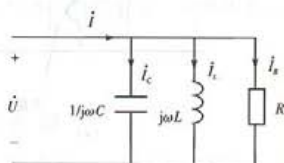


图 7.2-40 RLC 并联电路

设电流 I_x 参考方向如图所示。

首先列写 KCL 独立方程: $I_x = I_1 + 2 \angle 45^\circ$

然后由 KVL 补充剩余方程, 根据网孔 I 可得 KVL 方程: $4I_1 + j3 \cdot I_x = 10 \angle 0^\circ$, 联立两个方程, 求得

$$I_x = \frac{-8 \angle 45^\circ + 10}{4 + j3} = 1.43 \angle -89.4^\circ \text{ A}$$

(2) 采用网孔电流法。

设网孔电流参考方向, 根据网孔电流方程列写网孔 I 方程

$$(4 + j3)I_1 - j3 \times 2 \angle 45^\circ = 10 \angle 0^\circ$$

求解得

$$I_1 = \frac{j3 \times 2 \angle 45^\circ + 10}{4 + j3} \text{ A}$$

根据 KCL 定律得: $I_x = I_1 - 2 \angle 45^\circ = 0.02 - j1.4 \text{ A} = 1.43 \angle -89.4^\circ \text{ A}$

(3) 采用结点电压法。

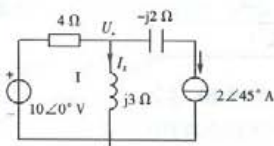


图 7.2-41 图结点电压法

首先设定参考点及结点电压 U_a 。

根据结点电压方程列写结点 a 方程。

$$U_a \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{j} \right) = \frac{10 \angle 0^\circ}{4} - 2 \angle 45^\circ$$

$$\text{求解得: } U_a = \frac{2.5 - 2 \angle 45^\circ}{(4 + j3)/j12}$$

$$\text{继而得: } I_x = \frac{U_a}{j3} = 1.43 \angle -89.4^\circ \text{ A}$$

(4) 采用戴维南定理。

如图所示戴维南等效模型, 其中: U_s 为 ab 端口的开路电压

$$U_s = U_{abk} = 10 \angle 0^\circ - 4 \times 2 \angle 45^\circ \text{ V}$$

Z_s 为除源后 ab 端口的等效复阻抗 $Z_s = Z_{abk} = 4 \Omega$

利用等效电路计算电流 $I_x = \frac{U_s}{Z_s + j3} = 1.43 \angle -89.4^\circ \text{ A}$

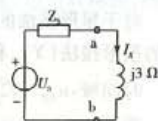
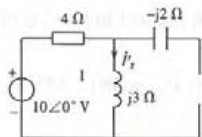


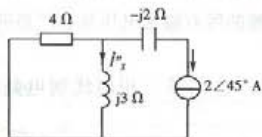
图 7.2-41 的戴维南等效模型

(5) 采用叠加原理。

运用叠加原理将原电路图 7.2-41 分解为图(a)和图(b)。



(a) 电压源单独作用



(b) 电流源单独作用

图 7.2-41 的单电源作用电路

根据图(a)可得: $I'_x = \frac{10 \angle 0^\circ}{4 + j3} = 2 \angle -36.87^\circ = 1.6 - j1.2 \text{ A}$

根据图(b)可得: $\dot{I}_X' = \frac{-2 \angle 45^\circ}{4 + j3} \times 4 = -1.6 \angle 8.13^\circ = -1.58 - j0.226 \text{ A}$

运用叠加原理计算得: $\dot{I}_X = \dot{I}_X' + \dot{I}_X'' = 0.02 - j1.43 \text{ A}$

无论用上述那种方法得到的 \dot{I}_X , 均可写出其时域表达式为

$$i_x = 1.43\sqrt{2} \sin(\omega t - 89.4^\circ) \text{ A}$$

7.2.15 三相电路及用电安全

三相电路是一种特殊的正弦交流电路,其特殊性表现在电源以及负载和电源的连接上。

1. 三相电源

三相电源是由三个频率相同、大小相同、相位相差 120° 的单相电源按照星形或三角形连接后形成的,如图 7.2-42 所示。图中的 A、B、C 称为端线或火线, N 称为中线,端线与中线之间的电压为相电压、端线与端线之间的电压为线电压。

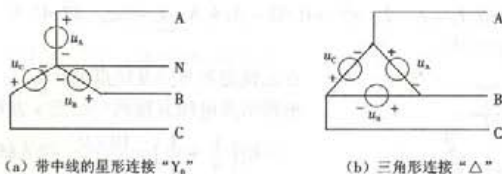


图 7.2-42 三相电源

设三个频率相同、大小相同、相位相差 120° 的单相电源时域表达式分别为

$$u_A = \sqrt{2} U_p \sin \omega t, u_B = \sqrt{2} U_p \sin(\omega t - 120^\circ), u_C = \sqrt{2} U_p \sin(\omega t + 120^\circ)$$

则它们的相量域形式为: $\dot{U}_A = U_p \angle 0^\circ, \dot{U}_B = U_p \angle -120^\circ, \dot{U}_C = U_p \angle 120^\circ$

对于星形接法的三相电源,无论是中有中线的星形接法(Y_0)或三相四线制接法,还是无中线的星形接法(Y),利用 KVL 和三相相电压推出线电压的描述式为

$$\text{时间域: } u_{AB} = \sqrt{2} U_l \sin(\omega t + 30^\circ), u_{BC} = \sqrt{2} U_l \sin(\omega t - 90^\circ), u_{CA} = \sqrt{2} U_l \sin(\omega t + 150^\circ)$$

$$\text{相量域: } \dot{U}_{AB} = U_l \angle 30^\circ, \dot{U}_{BC} = U_l \angle -90^\circ, \dot{U}_{CA} = U_l \angle 150^\circ$$

且线电压有效值和相电压有效值的关系为

$$U_l = \sqrt{3} U_p \quad (7.2-41)$$

我国低压供电系统中,三相电源相电压有效值 $U_p = 220 \text{ V}$, $U_l = 380 \text{ V}$ 。

由于三相电源的所有输出电压具有严格的对应关系,所以已知其一,必可推出其他 5 个电压。

【例 7.2-14】 已知某三相四线制电路的线电压 $\dot{U}_{AB} = 380 \angle 15^\circ \text{ V}$, 则相电压 $\dot{U}_B =$ ()。

(A) $220 \angle -135^\circ \text{ V}$ (B) $380 \angle -15^\circ \text{ V}$ (C) $220 \angle -15^\circ \text{ V}$ (D) $380 \angle -135^\circ \text{ V}$

解: 答案为选项(A)。

\dot{U}_{AB} 为线电压, 其有效值 $U_{AB} = U_l = \sqrt{3} U_p = \sqrt{3} \times 220 = 380 \text{ V}$; 因为线电压 \dot{U}_{AB} 的初相位 $\varphi_{AB} = 15^\circ$, 所以 \dot{U}_A 的初相位 $\varphi_A = 15^\circ - 30^\circ = -15^\circ$, 线电压 \dot{U}_B 的初相位 $\varphi_B = \varphi_A - 120^\circ = -135^\circ$, 可见, 选项(A)是正确的。

【例 7.2-14】 已知某三相电源的相电压 $\dot{U}_A = 220 \angle 15^\circ \text{ V}$, 当 $t = 12 \text{ s}$ 时, 三个线电压之和为()。

- (A) 380 V (B) 0 V (C) $380\sqrt{2} \text{ V}$ (D) 无法计算

解: 由于三相电源为外界提供的三个相电压是对称的, 所以该电源为外界提供的三个线电压也是对称的, 所以任意时刻三个对称电源之和均为 0。

答案选(B)。

2. 三相对称负载及电路分析

由三相电源为三相负载供电的电路称为三相电路。三相负载有星形连接和三角形连接两种。

(1) 对称负载星形连接

负载星形连接的电路如图 7.2-43 所示, 如果

$$Z_A = Z_B = Z_C = Z = |Z| \angle \varphi$$

则称该三相电路为三相对称的电路。在此情况下, 负载中的电流(称为相电流)为对称的电流, 各相电流与相应的线电流相等, 它们的有效值为

$$I_p = U_p / |Z|$$

根据 KCL 可得

$$\dot{I}_N = \dot{I}_A + \dot{I}_B + \dot{I}_C = 0$$

可见, “对称负载星形连接电路的中线可以去掉”。

(2) 对称负载三角形连接

负载三角形连接的电路如图 7.2-44 所示, 如果

$$Z_{AB} = Z_{BC} = Z_{CA} = Z = |Z| \angle \varphi$$

则三相对称的电路负载中的电流(相电流)也是对称的, 相电流与线电流的有效值关系为

$$I_l = \sqrt{3} I_p = \sqrt{3} \cdot \frac{U_l}{|Z|} \quad (7.2-42)$$

(3) 对称三相电路的功率

图 7.2-44 三相负载的三角形连接

三相总功率等于各项功率之和, 对于对称负载电路(无论是星形连接还是三角形连接)的总功率 S 、 P 、 Q 与电路的线电压 U_l 、线电流 I_l 之间关系:

$$\text{视在功率 } S = 3U_p I_p = \sqrt{3} U_l I_l$$

$$\text{有功功率 } P = 3U_p I_p \cos \varphi = \sqrt{3} U_l I_l \cos \varphi$$

$$\text{无功功率 } Q = 3U_p I_p \sin \varphi = \sqrt{3} U_l I_l \sin \varphi$$

值得注意的是: 式(7.2-43)中的 φ 是单相负载的阻抗角, 或相电压和相电流的相位差。

【例 7.2-16】 有一星形连接的对称负载接于线电压为 380 V 的三相四线制电源上, 如图 7.2-45 所示。当在 M 点断开时, U_l 为()。

- (A) 190 V (B) 220 V
(C) 311 V (D) 380 V

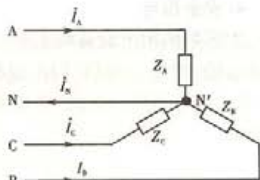


图 7.2-43 三相负载的星形连接

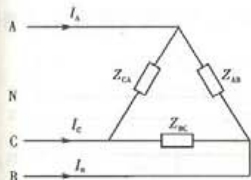


图 7.2-44 三相负载的三角形连接

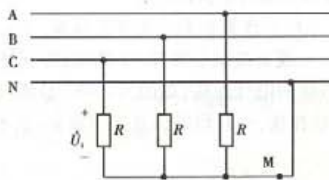


图 7.2-45 例 7.2-16 图

解:由于负载是对称的,中线存在与否对每相负载所承受的电压没有影响,始终等于电源的相电压。根据式(7.2-41)可得: $U_p = \frac{U_l}{\sqrt{3}} = 220 \text{ V}$,答案为(B)选项。

3. 不对称三相电路中的中线作用

三相不对称星接电路中,构成三相负载的各单相负载不再相同,即 $Z_A \neq Z_B \neq Z_C$ 。当电路接有中线时,各单相负载依然能够获得额定的相电压,可以保证负载正常工作。但是,如果去掉中线,电源中点N与负载中点N'间会出现电压(可通过节点电压法推出),根据基尔霍夫电压定律,可以推知,此时各单相负载上的电压有效值会大于或小于电源相电压有效值,从而造成负载因超压或欠压而不能正常工作,甚至造成负载的损坏。

4. 安全用电

大多数的用电设备均采用三相电源供电,正常情况下,用电设备外壳(导电材料制成)是不带电的,但是,一旦它们出现漏电问题,就会存在安全隐患,当使用者触及漏电设备的外壳时,发生触电事故。为此,必须采取安全防范措施。根据电源接线模式的不同,采取不同的保护措施。

(1) 三相三线制下的保护接地

保护接地是将电气设备外壳(正常情况下时不带电的)通过良好的接地体与地相接,如图7.2-46,这种保护措施用于三相三线制中点不接地系统中。当设备外壳出现带电现象时,可通过良好接地体将电流及时引入大地,避免接触者触电。

(2) 三相四线制下的保护接中(或保护接零)

保护接中就是将电气设备的金属外壳接到中线(或零线),适用于三相四线制系统中,如图7.2-47。当设备外壳出现带电现象时,可通过A相熔断器短路熔断切断电流通路,起到保护作用。

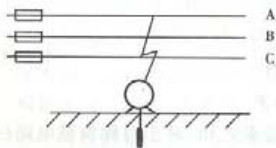


图 7.2-46 三相三线制下保护接地措施

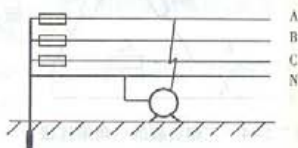


图 7.2-47 三相四线制下保护接中措施

需要注意的是,三相四线供电系统下,不允许进行保护接地。如图7.2-48,当设备b的外壳因A相造成漏电时,电源A、两个接地体通过大地形成回路,两个接地体的两端均存在端电压,使电源中线带电,造成原本正常运行着的、处于“保护接中”的设备a带电,这是很危险的。b设备的接入是错误的。

(3) 三线五线制下的保护措施

三线五线制系统即TT系统,特点是中线(或零线)N与保护PE线分别接地。两者完全没有直接的电气连接,如图7.2-49。该系统下的保护措施是将电气设备的金属外壳直接与保护PE线相接,一旦设备出现漏电现象,也不会造成其他设备外壳带电。

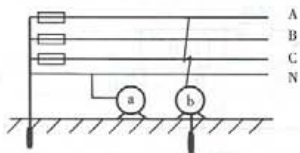


图 7.2-48 三相四线制下错误的保护措施

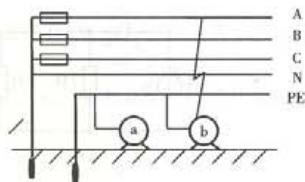


图 7.2-49 三相五线制下的保护措施

7.2.16 电路暂态及一阶电路暂态分析

1. 电路暂态

电路的工作状态分稳态和暂态,如图 7.2-50 所示。当各支路电流和各元件电压取值恒定或随时间按周期规律变化时,电路处于稳态,否则电路处于暂态。从一个稳定状态到另一个稳定状态过渡的过程,称为过渡过程或暂态过程。



图 7.2-50 电路的稳态与暂态

电路的状态与组成电路的元件和激励有关。电路出现暂态的条件:

- ①内因,电路必须含有电感电容惯性元件,即储能元件;
- ②外因,电路出现“换路”,即电路中激励、电路结构或参数发生突变。

设含储能元件的电路在 $t=0$ 时刻发生换路, $t=0_-$ 为换路前瞬间, $t=0_+$ 为换路后瞬间,则 $i_L(0_-)$ 、 $u_C(0_-)$ 为换路前的稳态值, $i_L(\infty)$ 、 $u_C(\infty)$ 为换路后的稳态值,因此,电路出现暂态所具有的条件还有

$$i_L(0_-) \neq i_L(\infty) \text{ 或 } u_C(0_-) \neq u_C(\infty)$$

2. 换路定律

惯性元件中的能量是不能发生突变的,所以,电容元件 C 两端的电压 u_C 和流过电感元件 L 的电流 i_L 不能发生突变,电路严格受换路定律约束,即

$$\begin{aligned} i_L(0_+) &= i_L(0_-) \\ u_C(0_+) &= u_C(0_-) \end{aligned} \quad (7.2-43)$$

【例 7.2-16】判断图 7.2-51 所示电路是否存在暂态?

解:两个电路均含有惯性元件,而且均存在换路。

对于图(a),换路前电容两端的电压 $u_C(0_-) = U_s$,换路后电路再次达到稳定状态时电容两端的电压 $u_C(\infty) = U_s$,由于 $u_C(0_-) = u_C(\infty)$,所以图(a)不存在暂态。

对于图(b),换路前电感中的电流 $i_L(0_-) = 0.5 \text{ A}$,换路后电路再次达到稳定状态时电感中的电流 $i_L(\infty) = 2 \text{ A}$,由于 $i_L(0_-) \neq i_L(\infty)$,所以图(b)存在暂态。

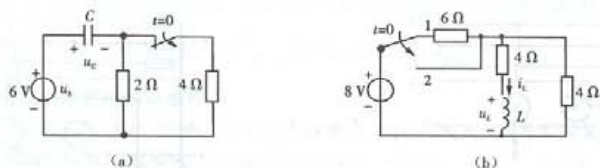


图 7.2-51 例 7.2-16 图

【例 7.2-17】 电容端电压和电感电流不能突变原因是()。

- (A) 元件的端电压和电流不能突变
 (B) 电场能量和磁场能量的变化率均为有限值
 (C) 电容端电压和电感电流都是有限值
 (D) 电容端电压和电感电流都受换路定律制约

解: 储能元件是惯性元件, 其能量是不能发生突变的。由于电容元件和电感元件中的储能分别为: $W_C = \frac{1}{2} C u_C^2$ 和 $W_L = \frac{1}{2} L i_L^2$, 所以, 电容元件 C 两端的电压 u_C 和流过电感元件 L 的电流 i_L 都是不能发生突变的。答案选(B)。

3. 一阶电路的暂态分析

1) 一阶电路

只含有一个(或等效为一个)储能元件的线性电路称为一阶电路, 如图 7.2-52 所示。

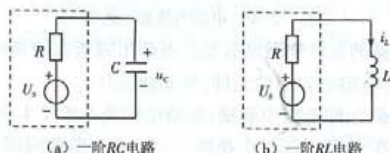


图 7.2-52 一阶电路

2) 一阶电路暂态分析法——三要素法

暂态分析是指含储能元件电路发生换路后, 从一个稳态向另一个稳态过渡过程中各物理量所遵循的规律。设图示电路在 $t=0$ 时刻发生换路, 某响应 $f(t)$ 换路后瞬间取值为 $f(0_+)$, 换路后的新稳态值为 $f(\infty)$, 则 $f(t)$ 在暂态过程中的变化规律:

$$f(t) = f(\infty) + [f(0_+) - f(\infty)] e^{-\frac{t}{\tau}} \quad (t \geq 0) \quad (7.2-44)$$

式(7.2-44)中的 $f(0_+)$ 初值, $f(\infty)$ 稳态值, τ 时间常数为 $f(t)$ 在暂态过程中的三要素。 τ 的大小与电路结构有关, 对于图 7.2-38 所示电路, 时间常数分别为

$$\tau = RC \quad \text{或} \quad \tau = \frac{L}{R} \quad (7.2-45)$$

τ 决定了暂态进程的快慢, τ 越大, 进程越慢, 反之则快。

3) 三要素法求解步骤

(1) 计算初值

- ① 由 $t=0_-$ 电路求 $i_L(0_-)$ 、 $u_C(0_-)$;

②根据式(7.2-43)换路定律求 $i_L(0_+)$ 、 $u_C(0_+)$;

③由 $t=0_+$ 电路,在 $i_L(0_+)$ 、 $u_C(0_+)$ 的条件下,根据 KVL、KCL、欧姆定律求其他的电压和电流的初值。

【例 7.2-18】 如图 7.2-53 所示,已知: $R_1 = R_2 = 10 \Omega$ 、 $L = 20 \text{ mH}$ 、 $I_S = 1 \text{ A}$,且开关闭合前电感中无电流,求 $i_L(0_+)$ 、 $u_L(0_+)$ 。

解:电路换路前已处于稳定状态, $i_L(0_-) = 0 \text{ A}$

根据换路定律 $i_L(0_+) = i_L(0_-)$ 得: $i_L(0_+) = 0 \text{ A}$

根据换路后电路可知:由于开关闭合后电感中仍无电流,所以 $R_1 i_L(0_+) = 0 \text{ V}$

由 KCL 得: $i_2(0_+) = I_S + i_L(0_+) = 1 \text{ A}$

根据欧姆定律得 R_2 两端电压: $R_2 i_2(0_+) = 10 \text{ V}$

由 KVL 得: $u_L(0_+) = R_2 i_2(0_+) - R_1 i_L(0_+) = 10 \text{ V}$

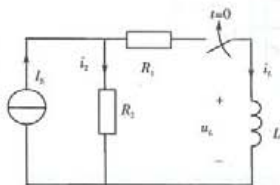


图 7.2-53 例 7.2-18 图

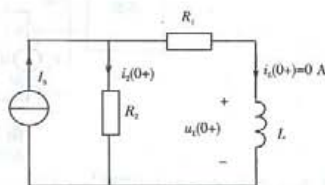


图 7.2-53 换路后电路图

(2) 由换路后电路计算稳态值(或终值)

设定电路激励为恒定直流量,所以 $t \rightarrow \infty$ 电路中的电感视为短路,电容视为开路。

【例 7.2-18 续】 计算例 7.2-18 图换路后达到稳态下的 $i_L(\infty)$ 、 $u_L(\infty)$ 。

解: $t \rightarrow \infty$ 时电路达到稳态,电感相当于短路,所以,

$$u_L(\infty) = 0,$$

根据分流公式得: $i_L(\infty) = \frac{R_2}{R_1 + R_2} I_S = 0.5 \text{ A}$

(3) 计算时间常数

针对换路后的电路,拿走电容或电感元件,将电路的剩余部分视为二端网络,求出该二端网络的无源网络等效电阻 R ,则

一阶 RC 电路的时间常数: $\tau = RC$

一阶 RL 电路的时间常数: $\tau = L/R$

【例 7.2-18 续】 计算例 7.2-18 电路的时间常数 τ 。

解:由如下电路图可得: $R = R_1 + R_2 = 20 \Omega$,

所以 $\tau = L/R = 20/20 \text{ ms} = 1 \text{ ms}$

(4) 将三要素带入式(7.2-44)中,获取 $f(t)$

$$\begin{aligned} i_L(t) &= i_L(\infty) + [i_L(0_+) - i_L(\infty)] e^{-\frac{t}{\tau}} \\ &= 0.5 + [0 - 0.5] e^{-\frac{t}{1 \times 10^{-3}}} = 0.5(1 - e^{-1000t}) \text{ A} (t \geq 0) \end{aligned}$$

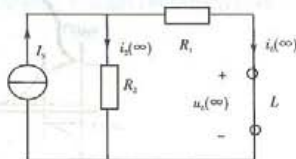


图 7.2-53 $t \rightarrow \infty$ 电路图



图 7.2-53 去掉电感后二端网络 N 二端网络 N 的无源网络

$$u_L(t) = u_L(\infty) + [u_L(0_+) - u_L(\infty)]e^{-\frac{t}{\tau}} = 0 + [10 - 0]e^{-\frac{t}{1000}} = 10e^{-1000t} \text{ (} t \geq 0 \text{)}$$

【例 7.2-19】如图 7.2-54, 已知电路在 $t=0$ s 时刻和 $t=1$ s 时刻出现两次换路。如果 $R_1 = R_2 = R_3 = 10 \Omega$, $C = 200 \mu\text{F}$, $u_C(0_-) = 0$, 那么如下描绘电容电压 u_C 变化规律的波形是 ()。

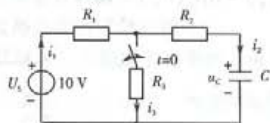
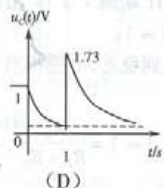
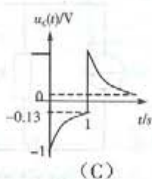
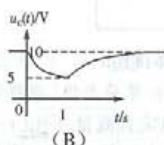
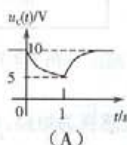


图 7.2-54 例 7.2-19 图



解: 本题所讨论的问题为电容两端电压 u_C 的变化规律, 根据换路定则(换路瞬间电容两端的电压不能突变)可判断选项(C)和选项(D)错误。

当 $t=0$ s 电路第一次换路时, $u_C(0_+) = 10$ V, $\tau_1 = RC = (R_1 // R_3 + R_2)C = 3$ ms, $i_L(\infty) = 0$ A, 由三要素法确定 i_L 的变化规律为

$$u_C(t) = u_C(\infty) + [u_C(0_+) - u_C(\infty)]e^{-\frac{t}{\tau_1}} = 5 + 5e^{-\frac{t}{3}} \text{ V (} 0 \leq t \leq 2 \text{ s; ms)}$$

当 $t=1$ s 电路第二次换路时, 由于 $1 \text{ s} \gg 5\tau_1$, 所以 $u_C(1_+) = u_C(1_-) = 5$ V,

$\tau_2 = (R_1 + R_2)C = 4$ ms, $u_C(\infty) = 10$ V。因为 $\tau_2 > \tau_1$, 说明第二次暂态过程的响应速度慢于第一次暂态过程的响应速度, 所以, 选(B)项。

7.2.17 电路频率特性

在交流电路中, 电感和电容的阻抗为频率的函数, 设信号的频率为 ω , 则电感抗 $X_L = \omega L$,

电容抗 $X_C = 1/\omega C$, 因此电路的等效复数阻抗也是频率的函数, 即

$$Z = f(j\omega)$$

即使电路参数和电路结构不变, 对于不同频率的信号, 电路也会做出不同的响应。这种想象取决于电源本身对外加信号频率的敏感性。

电路在不同频率的信号作用下所表现出的特性称为电路的频率特性。

对交流电路的频率特性分析, 通常用传递函数加以描述。

1. 双口网络及其传递函数

双端口网络如图 7.2-55, 激励源(电压源或电流源)作用端为输入口, 信号送出端(响应端)为输出口。

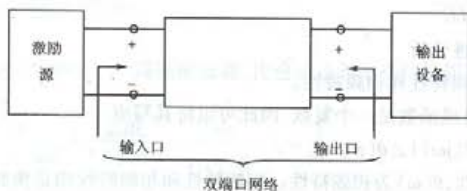


图 7.2-55 双端口网络

激励源借助双端口网络将信号传送到输出设备上, 所以, 一般用传递函数来表示双端口网络传输处理信号的性能。设双端口网络的响应相量为 \dot{R} , 激励相量为 \dot{E} , 则响应与激励的关系为

$$\dot{R} = \dot{E} \cdot H(j\omega)$$

$H(j\omega)$ 反映出双端口网络对激励 \dot{E} 的处理和传递能力, 完全取决于双端口网络的结构和参数, 定义其为该网络的传递函数, 表示为

$$H(j\omega) = \frac{\dot{R}}{\dot{E}} \quad (7.2-46)$$

式(7.2-46)表述的定义中包含如下几个含义:

- ① 响应量和激励量都是相量, 传递函数则是复数;
- ② 传递函数和响应量、激励量一样, 都是复数域里频率的函数, 所以也称它为复频域函数;
- ③ 激励量和响应量既可以是电压相量, 也可以是电流相量, 所以传递函数既可以是无量纲的电压比或电流比(称为电压放大倍数或电流放大倍数), 也可能是有量纲的电压与电流之比或电流与电压之比(因为是两个端口之间的电压电流关系, 所以称之为跨阻或跨导)。

【例 7.2-20】 求图 7.2-56 示网络的传递函数 $H(j\omega)$ 。

解: 根据分压公式可得

$$\dot{U}_o = \frac{j\omega L // \frac{1}{j\omega C}}{R + j\omega L // \frac{1}{j\omega C}} \dot{U}_i$$

所以该网络的传递函数为

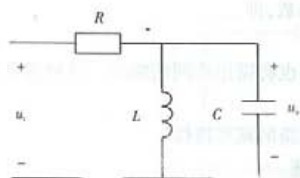


图 7.2-20 例 7.2-20

$$H(j\omega) = \frac{U_o}{U_i} = \frac{j\omega L / \frac{1}{j\omega C}}{R + j\omega L / \frac{1}{j\omega C}}$$

整理后得

$$H(j\omega) = \frac{j\omega RC}{(j\omega)^2 + j\omega RC + 1/LC}$$

$$= \frac{2\alpha(j\omega)}{(j\omega)^2 + 2\alpha(j\omega) + \omega_0^2}$$

其中: $\alpha = \frac{1}{2RC}$, $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$

2. 电路的频率特性分析

频率特性分为幅频特性和相频特性。

前面也已讲到, 传递函数是一个复数, 因此可以将其写成

$$H(j\omega) = |H(j\omega)| \angle \theta(\omega)$$

称 $|H(j\omega)|$ 为幅频特性, $\theta(\omega)$ 为相频特性。幅频特性和相频特性均是角频率 ω 的实函数。根据例 7.2-20 电路的传递函数可得

幅频特性 $\left| \frac{U_o}{U_i} \right| = \frac{2\alpha\omega}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2\alpha\omega)^2}}$

相频特性 $\theta(\omega) = \tan^{-1} 2\alpha\omega - \tan^{-1} \frac{2\alpha\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}$

3. 由幅频特性界定的典型滤波器

从传递函数的幅频特性可以看出, 双口网络对输入端口送入信号的传递实际上具有选择性, 有一些频率的信号会被滤掉, 通常称这样的网络为滤波器, 典型的滤波器有低通、高通、带通和带阻几种类型。

(1) 低通滤波器

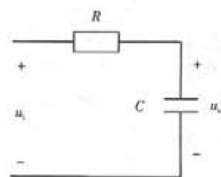
图 7.2-57(a) 所示 RC 电路是一个低通滤波器, 传递函数如下:

$$H(j\omega) = \frac{1/j\omega C}{R + 1/j\omega C} = \frac{1}{1 + j\omega RC} = \frac{1}{1 + j \frac{\omega}{\omega_0}} \quad (7.2-47)$$

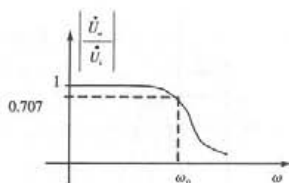
其中, $\omega_0 = \frac{1}{RC}$, 它的幅频特性为

$$|H(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega/\omega_0)^2}} \quad (7.2-48)$$

由此不难分析出, 当信号频率为 0 时, 容抗趋于无穷, 电容开路, 输出电压等于输入电压, 随着信号频率的升高, 容抗越来越小, 从电容端获得的输入信号也越来越小, 待信号频率趋于无穷时, 容抗趋于 0, 输出信号为 0。再看它的幅频特性函数, $\omega = 0$ 时, $|H(j\omega)| = 1$, $U_o = U_i$; $\omega = \omega_0$ 时, $|H(j\omega)| = 0.707$, $U_o = 0.707 U_i$; $\omega \rightarrow \infty$ 时, $|H(j\omega)| = 0$ 。可见, 该电路选择低频信号进行传递, 同时拒绝掉高频信号, 因此具有“通低阻高”的频率特性, 通频带为 $0 \sim \omega_0$ 。该低通滤波



(a) 低通滤波电路



(b) 幅频特性

图 7.2-57 低通滤波器

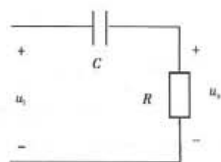
器的幅频特性如图 7.2-57(b) 所示。

(2) 高通滤波器

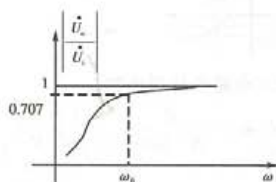
图 7.2-58 所示 RC 电路是一个高通滤波器, 传递函数和幅频特性如下:

$$H(j\omega) = \frac{R}{R + 1/j\omega C} = \frac{j\omega RC}{1 + j\omega RC} = \frac{j \frac{\omega}{\omega_0}}{1 + j \frac{\omega}{\omega_0}}, \omega_0 = \frac{1}{RC} \quad (7.2-49)$$

$$|H(j\omega)| = \frac{\frac{\omega}{\omega_0}}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}} \quad (7.2-50)$$



(a) 高通滤波电路



(b) 幅频特性

图 7.2-58 高通滤波器

从图示的幅频特性曲线可以看出, 高通滤波器的频率特性是“通高阻低”, 通频带为 $\omega_0 \sim \infty$ 。

(3) 带通滤波器和带阻滤波器

带通滤波器和带阻滤波器的幅频特性如图 7.2-59 所示(实现电路略)。可以看出, 带通滤波电路只会传递落入通频带的信号, 而带阻滤波器将阻断落入阻带的信号。

了解交流电路的频率特性, 对正确地使用它们具有指导意义。首先, 通过恰当地选择电路参数将 ω_0 调整到适当的位置, 以防范功能电路在传递、加工处理激励信号的时候产生信号变形(失真); 其次, 根据有用信号和噪声信号的频率关系, 选择低通或高通或其他滤波器, 将噪声信号滤除。

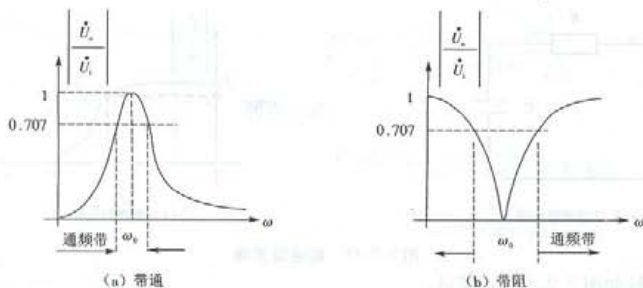


图 7.2-59 带通和带阻滤波器的幅频特性

【例 7.2-21】如图 7.2-60 所示电路的传递函数及幅频特性曲线是()。

(A) $H(\omega) = \frac{R}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}}$

(B) $|H(j\omega)| = \frac{R}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}}$

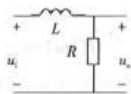
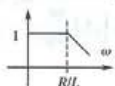
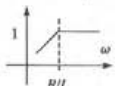
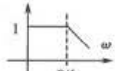
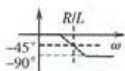


图 7.2-60 例 7.2-21 图



(C) $\theta(\omega) = -\tan^{-1} \frac{\omega L}{R}$

(D) $H(j\omega) = \frac{R}{R + j\omega L}$



解: 图示电路的传递函数

$$H(j\omega) = \frac{R}{R + j\omega L} = \frac{1}{1 + j\omega L/R} = \frac{1}{1 + j \frac{\omega}{\omega_0}}, \quad \omega_0 = \frac{R}{L}$$

与式(7.2-47)具有相同的形式, 因此是低通滤波器, 它的幅频特性为

$$|H(\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega/\omega_0)^2}} = \frac{1}{\sqrt{(\omega L/R)^2 + 1}}$$

所以, 答案为选项(D)。对于选项(B)中的表达式为例 7.2-21 电路的传递函数, 不符合题目要求, 选项(C)为相频特性曲线, 也不符合题目要求, 选项(A)的幅频特性曲线为高通滤波特性曲线, 所以选项(A)、(B)、(C)均错。

7.3 电动机与变压器

7.3.1 理想变压器

变压器是一种实际的电器设备或器件, 是利用电磁感应作用传递交流电能和信号的, 在某些场合, 变压器也作为电流变换器、阻抗变换器或电气隔离器使用。

变压器由一个铁心和绕在铁心上的两个或多个匝数不等的线圈(绕组)组成, 其中一个(或一组)线圈与交流电源相接, 称为一次绕组, 另一个(或一组)线圈与负载相接, 称为二次绕

组。两个绕组中没有电气的连接。

将变压器接于电源和负载之间后,线圈中便有电流流通,在其作用下,铁心中有较强的磁场产生,由此定有线圈电阻和铁心对电功率的损耗现象出现,不过,与变压器的输入功率和输出功率相比,这一损耗占有的比例很小(例如2%),因此,在对变压器电路的分析中,通常将它们忽略掉。忽略线圈电阻和铁心损耗以及很小的空载励磁电流的变压器称为理想变压器。

7.3.2 变压器的电压变换、电流变换和阻抗变换原理

变压器的电路模型如图 7.3-1 所示。

设变压器的一次绕组的匝数为 N_1 ,二次绕组的匝数为 N_2 ,则

$$k = \frac{N_1}{N_2}$$

称 k 为变压器的变比。变压器的变比决定了变压器的电压变换、电流变换以及阻抗变换能力。

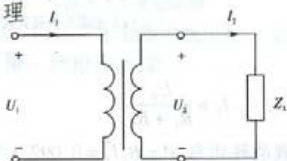


图 7.3-1 变压器电路

1. 电压变换

$$\frac{U_1}{U_2} = \frac{N_1}{N_2} = k \quad (7.3-1)$$

该式说明:电源端电压 U_1 通过变比为 k 的变压器将 U_2 送入负载 Z_L 。

2. 电流变换

由于理想变压器自身没有损耗,所以输出功率等于输入功率,所以

$$U_1 I_1 = U_2 I_2$$

根据式(7.3-1)得

$$\frac{I_1}{I_2} = \frac{1}{k} \quad \text{或} \quad I_2 = k I_1 \quad (7.3-2)$$

3. 阻抗变换

将变压器和变压器的负载整体看作一个二端网络,该二端网络的等效阻抗设为 Z_L^* ,如图 7.3-2 所示。利用变压器的电压变换式(7.3-1)和电流变换式(7.3-2)可以推出 Z_L 与 Z_L^* 大小之间的关系式(7.3-3):

$$Z_L^* = \frac{U_1}{I_1} = \frac{-U_2 \cdot \frac{N_1}{N_2}}{-I_2 \cdot \frac{N_2}{N_1}} = \left(\frac{N_1}{N_2}\right)^2 \cdot \frac{U_2}{I_2} = k^2 Z_L \quad (7.3-3)$$

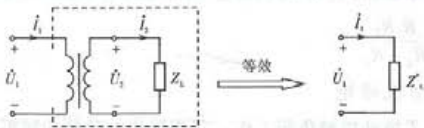


图 7.3-2 变压器的阻抗变换

利用阻抗匹配可以使电路的电源输出最大功率,或者说使电源的负载获得最大功率。

例如:一个正弦信号源的电压 $U_s = 50 \text{ V}$, $R_s = 1\,000 \text{ }\Omega$, 负载电阻 $40 \text{ }\Omega$, 0.8 W 。若电源与

负载直接相连,如图 7.3-3(a),则

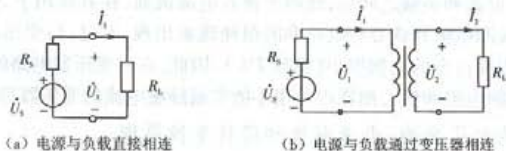


图 7.3-3 变压器的阻抗匹配作用

$$I_1 = \frac{U_s}{R_L + R_s}$$

负载消耗功率: $P = R_L I_1^2 = 0.0925 \text{ W}$ 。也就是说,负载仅能从电源获得 0.0925 W 的电能。若电源通过变压器与负载相连,如图 7.3-3(b),则根据理想变压器的特点($P_1 = P_2$),并利用阻抗变换表达式($R_L^* = k^2 R_L$),可得负载的消耗功率为

$$P = I_2^2 R_L = I_1^2 R_L^* = I_1^2 (k^2 R_L)$$

当 $R_L^* = R_s$ 时, R_L^* 可从电源处获得最大的功率,也就是 R_L 从电源处获得最大的功率,所以当变压器变比 $k = \sqrt{\frac{R_s}{R_L}} = 5$ 时,负载 R_L 可获得的最大功率,即 $P_{\max} = 0.625 \text{ W}$ 。

【例 7.3-1】 在图示 7.3-4 电路中,负载 R_L 的消耗功率为 72 W ,若变压器的变比 $k = 5$,则变压器原边电压有效值 U_1 ()。

(A) 等于 120 V

(B) 等于 4.8 V

(C) 等于 0.6 V

(D) 无法计算

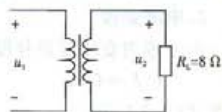


图 7.3-4 例 7.3-1 图

解:根据负载的消耗功率和电阻值,可得付边电压有效值

$$U_2: \frac{U_2^2}{R_L} = P = 72 \text{ W}, U_2 = 24 \text{ V}。根据变压器的电压变比 $k = \frac{U_1}{U_2}$ 可得: $U_1 = 120 \text{ V}$, 所以,选项(A)$$

正确。(B)选项错误地认为 $U_1 = kU_2$ 。

【例 7.3-2】 如图 7.3-5 所示理想变压器,试确定输出电阻 R_L 获得最大功率时的匝数比。

解:首先对变压器一次绕组左侧的有源二端网络进行戴维南等效,即用一个电压源模型等效代替,其内阻 $R_s = R_1 // R_2 = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2}$;

然后利用阻抗变换将变换至一次绕组侧,即 $R_L^* = k^2 R_L$,等效电路如图所示。

最后根据最大功率原理知: $R_L^* = R_s$ 时, R_L^* 获得最大功率,即 R_L 获得最大功率,由此得匝

$$\text{数比 } k = \sqrt{\frac{R_s}{R_L}} = \sqrt{\frac{1}{R_L} \cdot \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}}$$

7.3.3 三相异步电动机转矩

电动机靠电磁转矩 T 拖动机械负荷工作。三相异步电动机的转矩公式为

$$T = C_T \frac{sR_2}{R_2^2 + (sX_{20})^2} \cdot U_1^2 \quad (7.3-4)$$

式中: C_T 是电动机机械参数的综合系数,它体现电动机转子的尺寸、气隙大小等对转矩的影

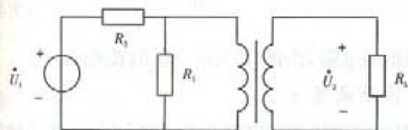


图 7.3-5 例 7.3-2 图

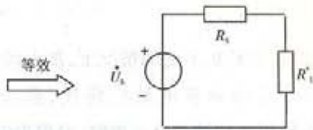


图 7.3-5 等效电路

响; R_2 、 X_{20} 是电动机转子绕组的等效电阻和静止状态下的感抗; U_1 是三相电源的线电压; s 是电动机的转差率,是电动机转子的转速 n 与内部磁场的同步转速 n_1 的相对差,即

$$s = \frac{n_1 - n}{n_1} \quad (7.3-5)$$

其中 $n_1 = \frac{60f}{p}$ (7.3-6)

p 为电动机的磁极对数,与定子绕组的结构有关。

电磁转矩与转差率的关系如图 7.3-6。

1. 三相异步电动机的电磁转矩

T 与电源电压 U_1^2 成正比,即 $T \propto U_1^2$ 。电源电压下降导致电动机带载能力下降,当电动机处于欠压状态运行时,可能会造成电动机的最大转矩低于负载转矩,使电动机的转速不断减小,导致最后停止运转,由于此时电动机与电源相连,因此,电动机又会因过热烧毁。

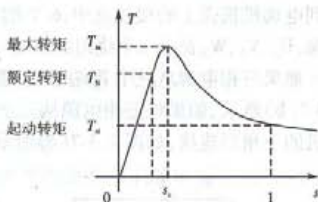


图 7.3-6 三相异步电动机的转矩特性

2. 三相异步电动机的启动转矩

电动机在启动瞬间, $n=0$, $s=1$,转子的漏电抗 X_2 达到最大值 X_{20} ,而转子电阻 R_2 通常很小,使 $X_{20} \gg R_2$,于是启动转矩

$$T_u = C_T \frac{R_2}{X_{20}^2} \cdot U_1^2 \quad (7.3-7)$$

也就是说,启动转矩几乎和转子绕组电阻成正比,所以,加大转子绕组的电阻可以提高电动机的启动能力。

值得注意的是,当电网电压下降时就会导致电动机的启动转矩小于负载转矩,导致电动机因无法启动而被烧毁。

3. 三相异步电动机的额定转矩

电动机的额定转矩 T_N 是指其工作在额定状态下产生的转矩,计算公式如下:

$$T_N = \frac{P_N}{2\pi n_N} = 9550 \frac{P_N}{n_N} \quad (7.3-8)$$

其中: P_N 为额定功率,kW; n_N 为额定转速,r/min。

4. 三相异步电动机的运行转矩

电动机在运行期间, n 接近 n_1 ,转差率 s 很小,使式中的 $sX_{20} \ll R_2$,此时转矩公式

$$T = C_T \frac{s}{R_2} \cdot U_1^2 \quad (7.3.9)$$

也就是说,在转矩不变的情况下,加大转子绕组的电阻会同时加大电动机的转差率。

7.3.4 三相异步电动机接线、启动、反转及调速方法

在使用三相异步电动机时,要根据电动机额定电压和供电电源电压的不同,对定子绕组进行正确的接线,使其能够正常工作。另外,电动机启动和运行还涉及启动方法、反转运行及调速等问题。

1. 三相异步电动机的接线

电动机作为三相电源的三相负载,必然存在三个完全相同的定子绕组的接线方式。三相异步电动机的接线涉及两个方面内容:其一,三相定子绕组如何连接成星接或角接;其二,如何决定三相定子绕组的接法。

三相异步电动机的工作电源是三相电源,为了便于接线,分别将三相定子绕组的6个端子引到电动机机壳上的接线盒中,6个端子的布局如图7.3-7所示。 U_1 、 V_1 、 W_1 表示三个绕组的首端, U_2 、 V_2 、 W_2 表示三个绕组的尾端。

如果三相电源从三个首端引入,并将三个尾端相接,则实现了电动机的星形连接,如图7.3-7(b)所示;如果将三相电源从三个首端引入,将三个绕组的首尾端顺次相接,则实现了电动机的三角形连接,如图7.3-7(c)所示。

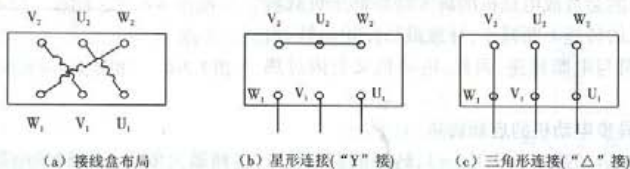


图7.3-7 三相异步电动机的两种接线模式

至于三个绕组作星形连接还是作三角形连接能使电动机处于额定状态下工作,则取决于电源电压和电动机的额定电压,当电动机额定电压标注为380V,要求电源电压一定为380V,采用三角形接法(“Δ”接);当电动机额定电压标注为220V/380V,接法视电源电压而定,对于线电压为220V电源,三个绕组应采用三角形接法(“Δ”接);对于线电压为380V电源,三个绕组应采用星形接法(“Y”接)。

2. 三相异步电动机的启动

1) 全压启动

电动机从静止状态合闸启动到稳定运行的过程称为启动过程。当外加电动机的额定电压启动时,称为全压启动,也称为直接启动。这种方案是最简单的启动方案,是全压启动。一般来讲,全压启动的启动电流是电动机额定运行时的工作电流的4~7倍,会造成电网电压的下降,严重时会影响电网上其他用电设备的正常工作。因此这种启动方法只适应于不频繁启动的小容量的异步机。

对于大容量的频繁启动的异步电动机必须采用以下特定的启动措施。

2) 降压启动

当负载阻抗一定时,负载电流有效值与外加电压有效值成正比,因此降压启动是降低启动

电流的有效方案,具体分为:Y- Δ 降压启动和自耦调压降压启动。

(1) Y- Δ 降压启动

Y- Δ 降压启动是指三相异步电动机正常运行时采用三角形连接方式,三个定子绕组在启动时改为星接方式连接。

设三相异步电动机的定子绕组阻抗为 $|Z|$,电源相电压 U_p 、线电压 U_l ,线电流 I_l 。

绕组星形连接时,线电流 $I_{ly} = I_p = \frac{U_p}{|Z|}$

若绕组三角形连接,则线电流

$$I_{l\Delta} = \sqrt{3}I_p = \sqrt{3} \frac{U_l}{|Z|} = \sqrt{3} \frac{\sqrt{3}U_p}{|Z|} = 3I_{ly} \quad (7.3-10)$$

这样,星形连接方式下的启动电流只是三角形连接启动时的 $1/3$ 。

Y- Δ 降压启动方法广泛应用于额定状态下定子绕组为 Δ 接法的鼠笼式异步电动机的启动,不适合于额定电压下定子绕组以星形连接的电动机。

(2) 自耦降压启动

自耦降压启动是借助专用的变压器——自耦调压器实现对电动机的降压启动。启动期间,调压器的一次线圈与电源相接,电压为 U_1 ,二次线圈与定子绕组相接,电压为 U_2 , U_1 与 U_2 满足关系: $U_2 = kU_1$, $k < 1$ 。启动结束,定子绕组直接接入电源。

设全压启动时的线电流为 I_l ,自耦降压启动时的电源线电流和负载线电流分别为 I'_l 、 I'_l ,则根据变压器一次侧电流和二次侧电流的关系,可知

$$I'_l = kI'_l = k \cdot \frac{kU_p}{|Z|} = k^2 I_l \quad (7.3-11)$$

可见,采用自耦降压启动的启动电流是全压启动时启动电流的 k^2 倍。

由于三相异步电动机的电磁转矩 T 与电源线电压 U_l^2 成正比,所以三相异步电动机的启动转矩会随着启动电压的减小而降低,因此,降压启动只适合于轻载甚至空载启动的场合。

例如:Y- Δ 降压启动方法的启动转矩仅为全压启动转矩的 $1/3$ 。

(3) 转子绕组串电阻启动

这种启动方式是绕线式三相异步电动机的启动方式。绕线式异步电动机应用于重载启动场合,通过采用增加转子绕组电阻以增大电动机的启动转矩。

【例 7.3-3】 采用适当措施降低三相鼠笼式电动机的启动电流是为了()。

- (A) 避免电动机烧毁 (B) 避免电动机瞬时过载
(C) 避免熔断器烧断 (D) 减小启动电流所引起的电网电压波动

解:答案为选项 D。

一般来讲,全压启动的启动电流是电动机额定运行时的工作电流的 $4 \sim 7$ 倍,会造成电网电压的下降,严重时会影响网上其他用电设备的正常工作。

【例 7.3-4】 有一台 6 kW 的三相异步电动机,其额定运行转速为 1480 r/min ,额定电压为 380 V ,全压启动转矩是额定运行转矩的 1.2 倍,现采用Y- Δ 启动以降低其启动电流,此时的启动转矩为

- (A) 15.48 Nm (B) 26.82 Nm (C) 38.7 Nm (D) 46.44 Nm

解:答案为选项(A)。

设 Y- Δ 启动转矩为 T'_{ST} , 全压启动转矩 T_{ST} , 二者关系: $T'_{ST} = \frac{1}{3}T_{ST}$ 。

因为 $T_{ST} = 1.2T_N$ 而 $T_N = 9550 \frac{P_N}{n_N} = 38.72 \text{ Nm}$

所以 $T'_{ST} = \frac{1}{3}T_{ST} = 0.4T_N = 15.48 \text{ Nm}$

3. 三相异步电动机的反转

三相异步电动机定子绕组连接正确, 外加合适的电源电压, 电动机就会旋转, 其旋转方向与电源的相序有关。

1) 电源的正相序和逆相序

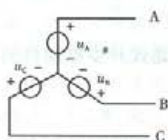


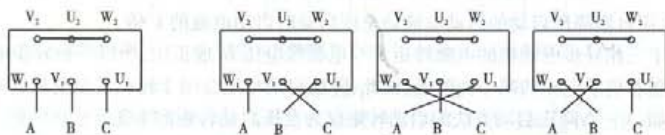
图 7.3-8 三相电源

如图 7.3-8 所示三相对称电源, 若 u_B 相电压滞后 u_A 相电压 120° , u_C 相电压滞后 u_B 相电压 120° , 则就记 A-B-C-A 为正相序、A-C-B-A 为逆相序。

2) 电动机的正转和反转

三相电动机的三个定子绕组正确连接后, 三个定子绕组的首端 U_1 、 V_1 、 W_1 与三相电源的三个火线相接, 电动机旋转。如果电源按正相序依次滞后 120° , 如图 7.3-9(a); 设电动机正向旋转, 则按逆相序接入 $U_1 \rightarrow W_1 \rightarrow V_1 \rightarrow U_1$ 时, 电动机反向旋转, 如图 7.3-9(b)。

实际上, 若将电动机的旋转从一个方向改变到另一个方向, 只需将接入三相电源的三个线圈首端 U_1 、 V_1 、 W_1 中的任何二个对调一次即可, 如图 7.3-9b 所示。



(a) 星接三相异步电动机正转接线

(b) 星接三相异步电动机的三种反转接线

图 7.3-9 改变三相异步电动机旋转方向的接线方案

3) 三相异步电动机的调速

三相异步电动机的调速是指在一定的负载条件下, 人为地改变电动机转子的转速。因为

$$n = 60 \frac{f}{p} (1 - s) \quad (7.3-12)$$

所以, 改变异步电动机转速的方法有: 改变转差率 s (调转差率调速)、电动机的磁极对数 p (调磁极对数调速) 和改变工作电源的频率 f (调频调速), 下面分别讨论。

(1) 调转差率调速

改变定子绕组电压, 或改变绕线式电动机转子绕组的电阻, 均可使同一转矩下的转差率发生变化, 达到调速的目的。

(2) 调磁极对数调速

三相异步电动机的磁极对数与定子绕组的结构有关, 其取值为有限的正整数, 因此, 调磁极对数调速方法属于有级调速, 即电动机转子旋转速度不是平滑调节。

(3) 调频调速

调频调速使用过改变鼠笼式电动机定子绕组的供电频率 f_1 ,来改变同步转速 n_1 ,而实现调速。供电频率的调整需要专用的变频器,它可以实现频率的平滑调节,可围绕50 Hz工频上下调节,从而使电动机的转速 $n > n_n (f > 50 \text{ Hz})$ 或 $n < n_n (f < 50 \text{ Hz})$ 。

【例 7.3-3】 如果称平滑调速为连续(无级)调速,那么属于连续调速的方法是()。

- (A) 调磁极对数调速 (B) 调转差率调速
(C) 调频调速 (D) 调磁极对数调速、调转差率调速、调频调速

解:答案选(C)。调磁极对数调速为有级调速,所以选项(A)和选项(B)错。

7.3.5 三相异步电动机运行特性

运行特性是指与电动机经济运行有关的特性,包括转矩、转速、功率因数、运行效率与输出机械功率 P_2 的关系,下面讨论功率因数和运行效率问题。

1. 功率因数

三相异步电动机定子电路的功率因数与输出功率的关系如图 7.3-10 所示。

异步电动机空载运行时功率因数很低,仅为 0.2 左右。随着负载 P_2 的增大,电动机的有功功率迅速上升,无功功率不变,功率因数也随之增大。在额定负载(80%~100%)范围内的某一点达到最大值。当负载大于额定负载后,由于转差率的增加,会使转子电路的漏电抗 sX_{20} 增大,从而导致电动机电路的功率因数升高到一定程度后转而下降。

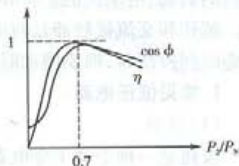


图 7.3-10 三相异步电动机运行特性

2. 运行效率

三相异步电动机的工作效率与输出功率的关系如图 7.3-7 所示。电动机的效率为

$$\eta = \frac{P_2}{P_1} \quad (7.3-13)$$

式中, P_1 为电动机的输入功率,计算式为

$$P_1 = \sqrt{3} U_1 I_1 \cos \varphi_1 \quad (7.3-13)$$

由于电动机在实现能量转换的过程中伴随着各种内部的损耗,如定子绕组和转子绕组电阻的铜损耗 P_{Cu1} 和 P_{Cu2} ,铁心损耗 P_{Fe} ,轴承摩擦等引起的机械损耗 P_m 和附加损耗 P_{ad} 等,所以根据功率平衡关系有如下等式存在:

$$P_1 = P_{Cu1} + P_{Fe} + P_{Cu2} + P_{ad} + P_m + P_2 = \sum P + P_2$$

将此等式代入式(7.3-13)可得

$$\eta = \frac{P_2}{P_1} = 1 - \frac{\sum P}{P}$$

电动机从空载运行到额定运行,主磁通和电动机转速变化不大,一般认为 P_{Fe} 和 P_m 基本不变,称为不变损耗,而 P_{Cu} 和 P_{ad} 随负载变化而变化,称为可变损耗。

空载运行时,输出功率 $P_2 = 0$,故效率 $\eta = 0$,随着负载的逐渐增加,效率明显上升,当 $P_m + P_{Fe} = P_{ad} + P_{Cu}$ 时,效率最高。若负载继续加大,效率反而减小。

常用的中小型异步电动机,最高效率一般设计在0.7~1.1 P_N 范围内,并且在该范围内,效